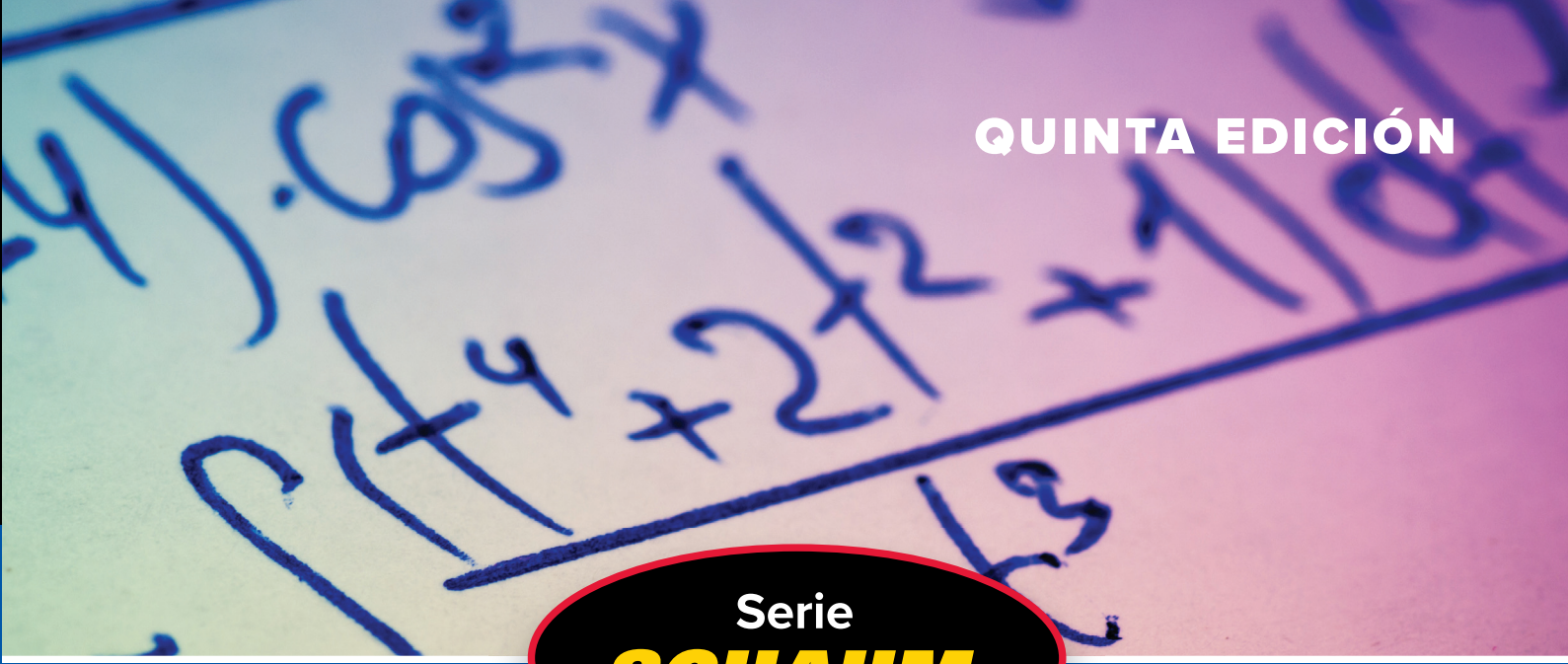


QUINTA EDICIÓN

Serie SCHAUM

Fórmulas y tablas de matemática aplicada

MURRAY R. SPIEGEL, PhD • SEYMOUR LIPSCHUTZ, PhD • JOHN LIU, PhD

- Más de 2 400 fórmulas y tablas
- Explicaciones concisas de todos los conceptos
- Ordenado por temas para una localización sencilla

Utilícelo en las siguientes materias:

- Matemáticas universitarias
- Álgebra, trigonometría y geometría
- Análisis numérico
- Cálculo I
- Cálculo II
- Cálculo III
- Ecuaciones diferenciales
- Probabilidad y estadística
- Matemáticas financieras

Mc Graw Hill

Serie
SCHAUM

Fórmulas y tablas de matemática aplicada

Serie SCHAUM

Fórmulas y tablas de matemática aplicada

Quinta edición

Murray R. Spiegel, PhD

Exprofesor y presidente
del Departamento de Matemáticas
del Centro de Estudios de Posgrado
Instituto Politécnico de Rensselaer

Seymour Lipschutz, PhD

Departamento de Matemáticas
Universidad de Temple

John Liu, PhD

Departamento de Matemáticas
Universidad de Maryland

Revisión técnica
Mat. Gabriel Alejandro Haro Canales
Universidad Autónoma de Guadalajara

Serie Schaum

Mc Graw Hill

MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • GUATEMALA • LONDRES
MADRID • MILÁN • NUEVA DELHI • NUEVA YORK • SAN JUAN
SANTIAGO • SAO PAULO • SIDNEY • SINGAPUR • TORONTO

Director general de Latinoamérica: Martín Chueco
Director editorial Latinoamérica: Hans Serrano
Gerente de portafolio de Universidades Latinoamérica: Gabriela López Ballesteros
Desarrolladora de contenido Sr.: Marcela Rocha Martínez
Senior Editor: Yanith Betsabé Torres Ruiz
Gerente de preprensa: José Palacios Hernández
Supervisor de preprensa: Juan Silverio Amandi Zárate
Plataformas digitales: Héctor Ávila y Juan Ojeda

Traductor: Jorge Ricardo Bolaños Servín y Elmer Murrieta Murrieta

Fórmulas y tablas de matemática aplicada

Quinta edición

Esta publicación no puede ser reproducida ni en todo ni en parte, ni registrada en/o trasmitida por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea mecánico, fotocopiado, electrónico, ni magnético, electroóptico o cualquier otro tipo, sin el permiso previo y por escrito de la editorial.

DERECHOS RESERVADOS © 2020, 2014, 2005, 1988, 1970 de la quinta edición en español por
MCGRAW-HILL INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.
Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A,
Piso 16, Col. Desarrollo Santa Fe,
Alcaldía Álvaro Obregón,
C.P. 01376, Ciudad de México.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736.

ISBN 13: 978-1-4562-8196-0

ISBN 13 (de la edición anterior): 978-607-15-1145-4

Traducción de *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 5a edición, Copyright © 2018 por Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz y John Liu. Publicado por McGraw-Hill Global Education Holdings, LLC. Todos los derechos reservados. ISBN 978-1-260-01053-4.

Translated from *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*, 5th edition, Copyright © 2018 by Murray R. Spiegel, Seymour Lipschutz, and John Liu. Published by McGraw-Hill Global Education Holdings, LLC. All rights reserved. ISBN 978-1-260-01053-4.

Acerca de los autores

SEYMOUR LIPSCHUTZ es miembro del profesorado de la Universidad de Temple y se desempeñó como docente en el Instituto Politécnico de Brooklyn. Recibió el doctorado en 1960 por el Instituto Courant de Ciencias Matemáticas de la Universidad de Nueva York. Es uno de los autores más prolíficos de la serie Schaum. En particular, ha escrito, entre otros títulos: *Álgebra lineal, Probabilidad, Matemáticas discretas (todos estos editados en español) y en inglés: Set Theory, Finite Mathematics y General Topology*.

JOHN LIU es actualmente profesor de matemáticas en la Universidad de Maryland y antes de la Universidad de Temple. Recibió un doctorado por la Universidad de California, ha sido profesor visitante en la Universidad de Nueva York, en la Universidad de Princeton y en Berkeley. Ha publicado numerosos artículos en matemáticas aplicadas, incluyendo en áreas de ecuaciones diferenciales parciales y análisis numérico.

El difunto **MURRAY R. SPIEGEL** recibió el grado de maestría en Física y el de doctorado en Matemáticas por la Universidad de Cornell. Desempeñó varios puestos en la Universidad de Harvard, Universidad de Columbia, Oak Ridge y en el Instituto Politécnico de Rensselaer, además de servir como consultor de matemáticas para un número de grandes compañías. Su último puesto fue de profesor y jefe del Departamento de Matemáticas en el Centro de Estudios de Posgrado de Hartford del Instituto Politécnico de Rensselaer. Estaba interesado en la mayoría de las ramas de las matemáticas, especialmente aquellas que involucran problemas de aplicación a la física e ingeniería. Fue autor de gran cantidad de artículos científicos y 14 libros de distintos temas de matemáticas.

Prefacio

Este manual contiene una colección de fórmulas y tablas matemáticas que serán valiosas para estudiantes e investigadores en el campo de matemáticas, física, ingenierías y otras ciencias. Se ha puesto especial cuidado en incluir las fórmulas y tablas más utilizadas en la práctica, prescindiendo de los resultados altamente especializados que rara vez se emplean. El resultado es un manual "amigable", cuyo material está mayormente cimentado en cursos de matemáticas universitarias. De hecho, la primera edición puede ya encontrarse en muchas bibliotecas y oficinas, y probablemente ha acompañado a sus dueños de oficina en oficina desde su época universitaria. Por lo tanto, este manual ha sobrevivido a la prueba del tiempo (mientras que muchos otros libros de texto universitarios han sido desechados).

Esta nueva edición mantiene el mismo espíritu que sus ediciones previas, pero ahora cuenta con algunos cambios. Hemos excluido algunas tablas ya obsoletas que pueden obtenerse fácilmente de una simple calculadora, también eliminamos algunas fórmulas rara vez usadas. El cambio principal es que las secciones sobre probabilidad y variables aleatorias han sido enriquecidas con material nuevo. Ambas secciones aparecen tanto en las ciencias naturales como en las ciencias sociales, incluyendo las ciencias educativas. Hay dos secciones nuevas: la Sección XIII, de Máquinas de Turing, y la Sección XIV, de Matemáticas financieras.

Los temas contenidos van desde lo elemental hasta lo avanzado. Entre los temas elementales figuran el álgebra, la geometría, la trigonometría, la geometría analítica, la probabilidad, la estadística y el cálculo. Los temas avanzados incluyen aquellos de ecuaciones diferenciales, análisis numérico y análisis vectorial, así como series de Fourier, las funciones beta y gamma, las funciones de Bessel y Legendre, transformadas de Laplace y Fourier, funciones elípticas y otras funciones especiales de importancia. Este amplio contenido se ha incorporado con el fin de proporcionar, en un solo volumen, la mayor parte de los resultados matemáticos importantes de utilidad tanto para el estudiante como para el investigador, sin importar su área particular de interés o nivel de aprendizaje.

El libro se divide en dos partes principales. En la Parte A se presentan las fórmulas matemáticas junto con otro tipo de material, tales como definiciones, teoremas, gráficas, diagramas, etc., esenciales para el correcto entendimiento y aplicación de las fórmulas. En la Parte B se encuentran las tablas numéricas. Estas tablas incluyen tablas de distribuciones estadísticas básicas (normal, *T* de Student, Chi cuadrada, etc.), funciones avanzadas (de Bessel, de Legendre, elípticas, etc.), y funciones financieras (valor compuesto, valor presente y futuro de una cantidad y anualidad).

McGraw-Hill Education desea agradecerle a los diversos autores y editores —en particular, al ejecutor literario del difunto Sir Ronald A. Fisher, F.R.S., Dr. Frank Yates, F.R.S., y a Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh., por la tabla III de su libro *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research*— quien dio el permiso de adaptar datos de sus libros para usar en varias tablas de este manual. El crédito y la referencia correspondiente a la fuente se incluye junto a cada tabla.

Finalmente, quisiera agradecer a todo el personal de la Serie Schaum de McGraw-Hill Education, especialmente a Diane Grayson, por su inquebrantable cooperación.

SEYMOUR LIPSCHUTZ
Universidad de Temple

Contenido

Parte A FÓRMULAS 1

Sección I Constantes elementales, productos, fórmulas 3

1. Alfabeto griego y constantes notables 3
2. Productos notables y factorización 5
3. Fórmula binominal y coeficientes binominales 7
4. Números complejos 10
5. Soluciones de ecuaciones algebraicas 13
6. Factores de conversión 15

Sección II Geometría 16

7. Fórmulas geométricas 16
8. Fórmulas de geometría analítica en el plano 22
9. Curvas especiales en el plano 28
10. Fórmulas de geometría analítica espacial 34
11. Momentos de inercia especiales 41

Sección III Funciones elementales trascendentales 43

12. Funciones trigonométricas 43
13. Funciones exponenciales y logarítmicas 53
14. Funciones hiperbólicas 56

Sección IV Cálculo 62

15. Derivadas 62
16. Integrales indefinidas 67
17. Tablas de integrales indefinidas notables 71
18. Integrales definidas 108

Sección V Ecuaciones diferenciales y análisis vectorial 116

19. Ecuaciones diferenciales básicas y soluciones 116
20. Fórmulas de análisis vectorial 119

Sección VI Series 134

21. Series de constantes 134
22. Series de Taylor 138
23. Números de Bernoulli y números de Euler 142
24. Series de Fourier 144

Sección VII Funciones especiales y polinomios 149

25. La función gamma 149
26. La función beta 152
27. Funciones de Bessel 153
28. Funciones de Legendre y asociadas de Legendre 164
29. Polinomios de Hermite 169
30. Polinomios de Laguerre y asociados de Laguerre 171
31. Polinomios de Chebyshev 175
32. Funciones hipergeométricas 178

Sección VIII Transformadas de Laplace y de Fourier 180

33. Transformada de Laplace 180
34. Transformada de Fourier 193

Sección IX Funciones elípticas y otras funciones especiales 198

35. Funciones elípticas 198
36. Función zeta de Riemann y otras funciones 203

Sección X Desigualdades y productos infinitos 205

37. Desigualdades 205
38. Productos infinitos 207

Sección XI Probabilidad y estadística 208

39. Estadística descriptiva 208
40. Probabilidad 217
41. Variables aleatorias 223

Sección XII Métodos numéricos 231

42. Interpolación 231
43. Integración numérica 235
44. Solución de ecuaciones no lineales 237
45. Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales ordinarias 239
46. Métodos numéricos para ecuaciones diferenciales parciales 241
47. Métodos iterativos para sistemas lineales 244

Sección XIII Máquinas de Turing 246

48. Definiciones básicas, expresiones 246
49. Descripción instantánea 247
50. Quíntuplas, máquinas de Turing 248
51. Cómputo con una máquina de Turing 250
52. Ejemplos 252

Sección XIV Finanzas matemáticas 254

53. Probabilidad básica 254
54. Tasas de interés 256
55. Teorema de arbitraje y opciones 257

56. El teorema de arbitraje 258
57. Fórmula de Black-Scholes 259
58. La estrategia de arbitraje de cobertura delta 260

Parte B TABLAS 263

Sección I Funciones logarítmicas, trigonométricas y exponenciales 265

1. Logaritmos comunes hasta cuatro decimales $\log_{10} N$ o $\log N$ 265
2. Sen x (x en grados y minutos) 267
3. Cos x (x en grados y minutos) 268
4. Tan x (x en grados y minutos) 269
5. Conversión de radianes a grados, minutos y segundos o fracciones de grados 270
6. Conversión de grados, minutos y segundos a radianes 271
7. Logaritmos naturales o neperianos $\log_e x$ o $\ln x$ 272
8. Funciones exponenciales e^x 274
9. Funciones exponenciales e^{-x} 275
10. Integrales exponenciales, senoidales y cosenoidales 276

Sección II Factorial y función gamma, coeficientes binomiales 277

11. Factorial de n 277
12. Función gamma 278
13. Coeficientes binomiales 279

Sección III Funciones de Bessel 281

14. Funciones de Bessel $J_0(x)$ 281
15. Funciones de Bessel $J_1(x)$ 281
16. Funciones de Bessel $Y_0(x)$ 282
17. Funciones de Bessel $Y_1(x)$ 282
18. Funciones de Bessel $I_0(x)$ 283
19. Funciones de Bessel $I_1(x)$ 283
20. Funciones de Bessel $K_0(x)$ 284
21. Funciones de Bessel $K_1(x)$ 284
22. Funciones de Bessel Ber(x) 285
23. Funciones de Bessel Bei(x) 285
24. Funciones de Bessel Ker(x) 286
25. Funciones de Bessel Kei(x) 286
26. Valores aproximados para las raíces de las funciones de Bessel 287

Sección IV Polinomios de Legendre 288

27. Polinomios de Legendre $P_n(x)$ 288
28. Polinomios de Legendre $P_n(\cos\theta)$ 289

Sección V Integrales elípticas 290

29. Integrales elípticas completas de primer y segundo tipo 290
30. Integrales elípticas incompletas de primer tipo 291
31. Integrales elípticas incompletas de segundo tipo 291

Sección VI Tablas financieras **292**

32. Interés compuesto: $(1 + r)^n$ 292
33. Valor presente de una cantidad: $(1 + r)^{-n}$ 293
34. Monto total de una anualidad: $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$ 294
35. Valor presente de una anualidad: $\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ 295

Sección VII Probabilidad y estadística **296**

36. Áreas bajo la curva normal estándar de $-\infty$ a x 296
37. Ordenadas de la curva normal estándar 297
38. Valores percentiles (t_p) para la distribución t de Student 298
39. Valores percentiles (χ^2_p) para la distribución χ^2 (chi cuadrada) 299
40. Valores percentiles de 95% para la distribución F 300
41. Valores percentiles de 99% para la distribución F 301
42. Números aleatorios 302

Índice de símbolos especiales y notaciones **303**

Índice analítico **305**

Parte A

FÓRMULAS

1 ALFABETO GRIEGO Y CONSTANTES NOTABLES

Alfabeto griego

Nombre griego	Letra griega	
	Minúscula	Mayúscula
Alpha	α	A
Beta	β	B
Gamma	γ	Γ
Delta	δ	Δ
Épsilon	ε	E
Zeta	ς	Z
Eta	η	H
Theta	θ	Θ
Iota	ι	I
Kappa	κ	K
Lambda	λ	Λ
Mu	μ	M

Nombre griego	Letra griega	
	Minúscula	Mayúscula
Nu	ν	N
Xi	ξ	Ξ
Ómicron	o	O
Pi	π	Π
Rho	ρ	P
Sigma	σ	Σ
Tau	τ	T
Upsilon	υ	Υ
Phi	φ	Φ
Chi	χ	X
Psi	ψ	Ψ
Omega	ω	Ω

Constantes notables

1.1. $\pi = 3.14159\ 26535\ 89793\ \ldots$

1.2. $e = 2.71828\ 18284\ 59045\ \ldots = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$

$=$ base natural de logaritmos

1.3. $\gamma = 0.57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 6512\ \ldots =$ *constante de Euler*

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$$

1.4. $e^{\gamma} = 1.78107\ 24179\ 90197\ 9852\ \ldots$ (vea la fórmula 1.3).

1.5. $\sqrt{e} = 1.64872\ \ 12707\ \ 00128\ \ 1468\ \ldots$

1.6. $\sqrt{\pi} = \Gamma(\frac{1}{2}) = 1.77245\ \ 38509\ \ 05516\ \ 02729\ \ 8167\ \ldots$
donde Γ es la *función gamma* (vea la fórmula 25.1).

1.7. $\Gamma(\frac{1}{3}) = 2.67893\ \ 85347\ \ 07748\ \ldots$

1.8. $\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.62560\ \ 99082\ \ 21908\ \ldots$

1.9. $1 \text{ radián} = \dfrac{180^\circ}{\pi} = 57.29577\ \ 95130\ \ 8232\ \ldots^\circ$

1.10. $1^\circ = \dfrac{\pi}{180} \text{ radianes} = 0.01745\ \ 32925\ \ 19943\ \ 29576\ \ 92\ \ldots \text{ radianes}$

2 PRODUCTOS NOTABLES Y FACTORIZACIÓN

2.1. $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

2.2. $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

2.3. $(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

2.4. $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

2.5. $(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$

2.6. $(x-y)^4 = x^4 - 4x^3y + 6x^2y^2 - 4xy^3 + y^4$

2.7. $(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

2.8. $(x-y)^5 = x^5 - 5x^4y + 10x^3y^2 - 10x^2y^3 + 5xy^4 - y^5$

2.9. $(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$

2.10. $(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$

Los resultados del 2.1 al 2.10 constituyen casos especiales de la *fórmula binomial* (vea la fórmula 3.3).

2.11. $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

2.12. $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

2.13. $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

2.14. $x^4 - y^4 = (x-y)(x+y)(x^2 + y^2)$

2.15. $x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$

2.16. $x^5 + y^5 = (x+y)(x^4 - x^3y + x^2y^2 - xy^3 + y^4)$

2.17. $x^6 - y^6 = (x-y)(x+y)(x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2.18. $x^4 + x^2y^2 + y^4 = (x^2 + xy + y^2)(x^2 - xy + y^2)$

2.19. $x^4 + 4y^4 = (x^2 + 2xy + 2y^2)(x^2 - 2xy + 2y^2)$

Algunas formas generales de las factorizaciones anteriores se dan a continuación, donde n es un número entero positivo.

2.20. $$x^{2n+1} - y^{2n+1} = (x-y)(x^{2n} + x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 + \cdots + y^{2n})$$
$$= (x-y)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1} + y^2\right)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1} + y^2\right)$$
$$\cdots\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + y^2\right)$$

2.21. $$x^{2n+1} + y^{2n+1} = (x+y)(x^{2n} - x^{2n-1}y + x^{2n-2}y^2 - \cdots + y^{2n})$$
$$= (x+y)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{2\pi}{2n+1} + y^2\right)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{4\pi}{2n+1} + y^2\right)$$
$$\cdots\left(x^2 + 2xy\cos\frac{2n\pi}{2n+1} + y^2\right)$$

2.22. $$x^{2n} - y^{2n} = (x-y)(x+y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \cdots)(x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \cdots)$$
$$= (x-y)(x+y)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{\pi}{n} + y^2\right)\left(x^2 - 2xy\cos\frac{2\pi}{n} + y^2\right)$$
$$\cdots\left(x^2 - 2xy\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + y^2\right)$$

2.23. $$x^{2n} + y^{2n} = \left(x^2 + 2xy\cos\frac{\pi}{2n} + y^2\right)\left(x^2 + 2xy\cos\frac{3\pi}{2n} + y^2\right)$$
$$\cdots\left(x^2 + 2xy\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n} + y^2\right)$$

3 FÓRMULA BINOMINAL Y COEFICIENTES BINOMINALES

Factorial de *n*

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$, el *factorial de n* o *n factorial* se define como sigue:

3.1. $n! = n(n-1)\cdot\ldots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

El *factorial de cero* se define por:

3.2. $0! = 1$

De manera alterna, el *factorial de n* puede definirse recursivamente como sigue:

$$0! = 1 \quad \text{y} \quad n! = n\cdot(n-1)!$$

EJEMPLO: $4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 24$,
$5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 5\cdot 4! = 5(24) = 120$,
$6! = 6\cdot 5! =$ *Ecuación cuadrática*: $6(120) = 720$

La fórmula binomial para enteros positivos *n*

Para $n = 1, 2, 3, \ldots$,

3.3. $(x+y)^n = x^n + nx^{n-1}y + \dfrac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}y^2 + \dfrac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^{n-3}y^3 + \cdots + y^n$

Esta se llama *fórmula binomial.* Puede extenderse a otros valores de *n*, así como a una serie infinita (vea la fórmula 22.4).

EJEMPLO:

(a) $(a-2b)^4 = a^4 + 4a^3(-2b) + 6a^2(-2b)^2 + 4a(-2b)^3 + (-2b)^4 = a^4 - 8a^3b + 24a^2b^2 - 32ab^3 + 16b^4$
Donde $x = a$ y $y = -2b$.

(b) Vea la figura 3.1a.

Coeficientes binomiales

La fórmula 3.3 puede reescribirse en la forma:

3.4. $(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n$

donde los coeficientes, llamados *coeficientes binomiales*, vienen dados por:

3.5. $$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{n-k}$$

EJEMPLO: $\binom{9}{4} = \frac{9\cdot 8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 126, \quad \binom{12}{5} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 792, \quad \binom{10}{7} = \binom{10}{3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$

Note que $\binom{n}{r}$ tiene exactamente r factores tanto en el numerador como en el denominador.

Los coeficientes binomiales pueden ordenarse en un arreglo triangular, llamado *triángulo de Pascal*, como se muestra en la figura 3-1b. El triángulo satisface las siguientes propiedades:

(1) El primer y último número en cada renglón es 1.

(2) Todo otro número en el arreglo puede obtenerse al sumar los dos números que aparecen directamente arriba de él.

EJEMPLO:

$$10 = 4 + 6, \qquad 15 = 5 + 10, \qquad 20 = 10 + 10$$

La propiedad (2) puede escribirse como sigue:

3.6. $$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\begin{aligned}
(a+b)^0 &= 1 \\
(a+b)^1 &= a + b \\
(a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\
(a+b)^3 &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \\
(a+b)^4 &= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4 \\
(a+b)^5 &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5 \\
(a+b)^6 &= a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

a)

$$\begin{array}{c}
1 \\
1\quad 1 \\
1\quad 2\quad 1 \\
1\quad 3\quad 3\quad 1 \\
1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\
1\quad 5\quad \textcircled{10}\quad 10\quad 5\quad 1 \\
1\quad 6\quad \textcircled{15}\quad \textcircled{20}\quad 15\quad 6\quad 1 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

b)

Fig. 3-1

Propiedades de los coeficientes binomiales

A continuación se listan propiedades adicionales de los coeficientes binomiales:

3.7. $$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$$

3.8. $$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \cdots (-1)^n \binom{n}{n} = 0$$

3.9. $$\binom{n}{n} + \binom{n+1}{n} + \binom{n+2}{n} + \cdots + \binom{n+m}{n} = \binom{n+m+1}{n+1}$$

3.10. $\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+\binom{n}{4}+\cdots=2^{n-1}$

3.11. $\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+\binom{n}{5}+\cdots=2^{n-1}$

3.12. $\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\binom{n}{2}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

3.13. $\binom{m}{0}\binom{n}{p}+\binom{m}{1}\binom{n}{p-1}+\cdots+\binom{m}{p}\binom{n}{0}=\binom{m+n}{p}$

3.14. $(1)\binom{n}{1}+(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}+\cdots+(n)\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

3.15. $(1)\binom{n}{1}-(2)\binom{n}{2}+(3)\binom{n}{3}-\cdots(-1)^{n+1}(n)\binom{n}{n}=0$

La fórmula multinomial

Sean $n_1, n_2, \ldots, n_r$ enteros no negativos tales que $n_1+n_2+\cdots+n_r=n$. Entonces, la siguiente expresión, llamada el *coeficiente multinomial*, se define como sigue:

3.16. $$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}=\frac{n!}{n_1!\,n_2!\cdots n_r!}$$

EJEMPLO: $$\binom{7}{2,\,3,\,2}=\frac{7!}{2!3!2!}=210, \qquad \binom{8}{4,\,2,\,2,\,0}=\frac{8!}{4!2!2!0!}=420$$

El nombre "coeficiente multinomial" se debe a la siguiente fórmula:

3.17. $$(x_1+x_2+\cdots+x_p)^n=\sum\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_r}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_r^{n_r}$$

donde la suma, denotada por Σ, se toma sobre todos los posibles coeficientes multinomiales.

4 NÚMEROS COMPLEJOS

Definiciones relativas a números complejos

Un número complejo z se escribe generalmente en la forma

$$z = a + bi$$

donde a y b son números reales e i, llamada *unidad imaginaria*, se caracteriza por tener la propiedad de que $i^2 = -1$. Los números reales a y b se conocen como la *parte real* y la *parte imaginaria* de $z = a + bi$, respectivamente.

El *complejo conjugado* de z se denota por $\overline{z}$ y se define como

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

en consecuencia $a + bi$ y $a - bi$ son conjugados uno del otro.

Igualdad de números complejos

4.1. $a + bi = c + di$ si y solo si $a = c$ y $b = d$

Aritmética de los números complejos

Las fórmulas para la suma, resta, multiplicación y división son las siguientes:

4.2. $(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

4.3. $(a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

4.4. $(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

4.5. $$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{a+bi}{c+di} \bullet \frac{c-di}{c-di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \left(\frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)i$$

Observe que las operaciones anteriores se obtienen siguiendo las reglas elementales del álgebra y reemplazando i^2 por -1 siempre que sea el caso.

EJEMPLO: Suponga que $z = 2 + 3i$ y $w = 5 - 2i$. Entonces:

$$z + w = (2 + 3i) + (5 - 2i) = 2 + 5 + 3i - 2i = 7 + i$$

$$zw = (2 + 3i)(5 - 2i) = 10 + 15i - 4i - 6i^2 = 16 + 11i$$

$$\overline{z} = \overline{2 + 3i} = 2 - 3i \text{ y } \overline{w} = \overline{5 - 2i} = 5 + 2i$$

$$\frac{w}{z} = \frac{5 - 2i}{2 + 3i} = \frac{(5 - 2i)(2 - 3i)}{(2 + 3i)(2 - 3i)} = \frac{4 - 19i}{13} = \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i$$

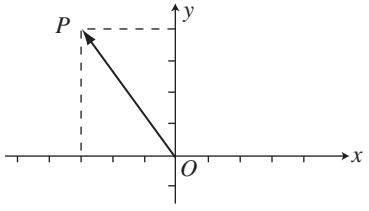
Plano complejo

Los números reales pueden ser representados por puntos en una línea, llamada *línea real*, y similarmente, los números complejos pueden ser representados por puntos en un plano llamado *diagrama de Argand*, *plano gaussiano* o simplemente *plano complejo*. Específicamente, sea (a, b) el punto en el plano que representa el número complejo $z = a + bi$. Por ejemplo, el punto P en la figura 4-1 representa el número complejo $z = -3 + 4i$. El número complejo puede también interpretarse como el vector que desde el origen O se dirige al punto P.

El *valor absoluto* de un número complejo $z = a + bi$, denotado por $|z|$, se define como sigue:

4.6. $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$

Observe que $|z|$ es la distancia del origen O al punto z en el plano complejo.



$P = (-3, 4) = -3 + 4i$

Fig. 4-1

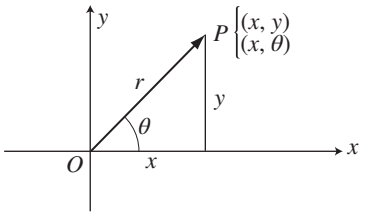


Fig. 4-2

Forma polar de los números complejos

El punto P en la figura 4-2 con coordenadas (x, y) representa el número complejo $z = x + iy$. El punto P puede también representarse por medio de *coordenadas polares* (r, θ). Puesto que $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$, se sigue que:

4.7. $z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)$

siendo esta la *forma polar* del número complejo. Con frecuencia decimos que $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ es el *módulo* y θ la *amplitud* de $z = x + iy$.

Multiplicación y división de números complejos en forma polar

4.8. $[r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)][r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)] = r_1 r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$

4.9. $\dfrac{r_1(\cos\theta_1 + i\,\text{sen}\,\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\,\text{sen}\,\theta_2)} = \dfrac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\,\text{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$

Teorema de De Moivre

Para cualquier número real p, el teorema de De Moivre establece que:

4.10. $[r(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)]^p = r^p(\cos p\theta + i\,\text{sen}\,p\theta)$

Raíces de números complejos

Sea $p = 1/n$ donde n es cualquier entero positivo. La ecuación 4.10 puede escribirse como sigue:

4.11. $$[r(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)]^{1/n} = r^{1/n}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$$

donde k es cualquier entero. De esta fórmula, se pueden obtener todas las raíces n-ésimas de un número complejo poniendo $k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$.

5 SOLUCIONES DE ECUACIONES ALGEBRAICAS

Ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

5.1. Soluciones:
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si a, b, c son reales y $D = b^2 - 4ac$ es el *discriminante*, entonces las raíces son:

(i) reales y distintas si $D > 0$
(ii) reales e iguales si $D = 0$
(iii) conjugadas complejas si $D < 0$

5.2. Si x_1, x_2 son las raíces, entonces $x_1 + x_2 = -b/a$ y $x_1 x_2 = c/a$.

Ecuación cúbica: $x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0$

Sean
$$Q = \frac{3a_2 - a_1^2}{9}, \qquad R = \frac{9a_1a_2 - 27a_3 - 2a_1^3}{54},$$
$$S = \sqrt[3]{R + \sqrt{Q^3 + R^2}}, \qquad T = \sqrt[3]{R - \sqrt{Q^3 + R^2}}$$

donde $ST = -Q$.

5.3. Soluciones:
$$\begin{cases} x_1 = S + T - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 + \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \\ x_3 = -\frac{1}{2}(S+T) - \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{2}i\sqrt{3}(S-T) \end{cases}$$

Si a_1, a_2, a_3, son reales y $D = Q^3 + R^2$ es el *discriminante*, entonces:

(i) una de las raíces es real y dos son complejas conjugadas si $D > 0$.
(ii) todas las raíces son reales y por lo menos dos de ellas son iguales si $D = 0$.
(iii) todas las raíces son reales y distintas si $D < 0$.

Si $D < 0$, el cálculo se simplifica mediante el uso de trigonometría.

5.4. Soluciones:

Si $D < 0$:
$$\begin{cases} x_1 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_2 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta + 120°) - \frac{1}{3}a_1 \\ x_3 = 2\sqrt{-Q}\cos(\frac{1}{3}\theta + 240°) - \frac{1}{3}a \end{cases}$$

donde $\cos\theta = R/\sqrt{-Q^3}$.

5.5. $x_1 + x_2 + x_3 = -a_1, \quad x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1 = a_2, \quad x_1x_2x_3 = -a_3$

donde x_1, x_2, x_3 son las tres raíces.

Ecuación cuártica: $x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0$

Sea y_1 una raíz real de la siguiente ecuación cúbica:

5.6. $y^3 - a_2y^2 + (a_1a_3 - 4a_4)y + (4a_2a_4 - a_3^2 - a_1^2a_4) = 0$

Las cuatro raíces de la ecuación cuártica son las cuatro raíces de la siguiente ecuación:

5.7. $z^2 + \frac{1}{2}\left(a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 + 4y_1}\ \right)z + \frac{1}{2}\left(y_1 \mp \sqrt{y_1^2 - 4a_4}\ \right) = 0$

Suponga que todas las raíces de 5.6 son reales; por tanto, el cálculo se simplifica utilizando la raíz real particular que produce todos los coeficientes reales en la ecuación cuadrática 5.7.

5.8.
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a_1 \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1 + x_1x_3 + x_2x_4 = a_2 \\ x_1x_2x_3 + x_2x_3x_4 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 = -a_3 \\ x_1x_2x_3x_4 = x_4 \end{cases}$$

donde x_1, x_2, x_3, x_4 son las cuatro raíces.

6 FACTORES DE CONVERSIÓN

Longitud

1 kilómetro (km)	= 1 000 metros (m)	1 pulgada (pulg)	= 2.540 cm
1 metro (m)	= 100 centímetros (cm)	1 pie	= 30.48 cm
1 centímetro (cm)	= 10^{-2} m	1 milla (mi)	= 1.609 km
1 milímetro (mm)	= 10^{-3} m	1 milímetro	= 10^{-3} pulg
1 micrón (μ)	= 10^{-6} m	1 centímetro	= 0.3937 pulg
1 milimicrón (mμ)	= 10^{-9} m	1 metro	= 39.37 pulg
1 angstrom (Å)	= 10^{-10} m	1 kilómetro	= 0.6214 mi

Área

1 metro cuadrado (m^2)	= 10.76 pie^2	1 milla cuadrada (mi^2)	= 640 acres
1 pie cuadrado (pie^2)	= 929 cm^2	1 acre	= 43 560 pie^2

Volumen 1 litro (L) = 1 000 cm^3 = 1.057 cuarto de galón (qt) = 61.02 $pulg^3$ = 0.03532 pie^3
1 metro cúbico (m^3) = 1 000 L = 35.32 pie^3
1 pie cúbico (pie^3) = 7.481 galones (EEUU) = 0.02832 m^3 = 28.32 L
1 galón (EEUU) = 231 $pulg^3$ = 3.785 L; 1 galón (británico) = 1.201 gal (EEUU) = 277.4 $pulg^3$

Masa 1 kilogramo (kg) = 2.2046 libras (lb) = 0.06852 slug; 1 lb = 453.6 g = 0.03108 slug
1 slug = 32.174 lb = 14.59 kg

Velocidad 1 km/h = 0.2778 m/seg = 0.6214 mi/h = 0.9113 pie/seg
1 mi/h = 1.467 pie/seg = 1.609 km/h = 0.4470 m/seg

Densidad 1 g/cm^3 = 10^3 kg/m^3 = 62.43 lb/pie^3 = 1.940 $slug/pie^3$
1 lb/pie^3 = 0.01602 g/cm^3; 1 $slug/pie^3$ = 0.5154 g/cm^3

Fuerza 1 newton (nt) = 10^5 dinas = 0.1020 kgf = 0.2248 lbf
1 libra fuerza (lbf) = 4.448 nt = 0.4536 kgf = 32.17 libras
1 kilogramo fuerza (kgf) = 2.205 lbf = 9.807 nt
1 tonelada (EEUU) = 2 000 lbf; 1 tonelada grande = 2 240 lbf; 1 tonelada métrica = 2 205 lbf

Energía 1 joules = 1 nt m = 10^7 ergios = 0.7376 pie lbf = 0.2389 cal = 9.481×10^{-4} Btu
1 pie lbf = 1.356 joules = 0.3239 cal = 1.285×10^{-3} Btu
1 caloría (cal) = 4.186 joules = 3.087 pie lbf = 3.968×10^{-3} Btu
1 Btu (unidad térmica británica) = 778 pie lbf = 1 055 joules = 0.293 watt h
1 kilowatt hora (kw h) = 3.60×10^6 joules = 860.0 kcal = 3 413 Btu
1 electrón voltio (ev) = 1.602×10^{-19} joules

Potencia 1 watt = 1 joule/seg = 10^7 ergios/seg = 0.2389 cal/seg
1 caballo de fuerza (hp) = 550 pie lbf/seg = 33 000 pie lbf/min = 745.7 watts
1 kilowatt (kw) = 1.341 hp = 737.6 pie lbf/seg = 0.9483 Btu/seg

Presión 1 nt/m^2 = 10 $dinas/cm^2$ = 9.869×10^{-6} atmósferas = 2.089×10^{-2} lbf/pie^2
1 $lbf/pulg^2$ = 6 895 nt/m^2 = 5.171 cm de mercurio = 27.68 pulg de agua
1 atmósfera (atm) = 1.013×10^5 nt/m^2 = 1.013×10^6 $dinas/cm^2$ = 14.70 $lbf/pulg^2$
= 76 cm de mercurio = 406.8 pulg de agua

7 FÓRMULAS GEOMÉTRICAS

Rectángulo de largo b y ancho a

7.1. Área $= ab$

7.2. Perímetro $= 2a + 2b$

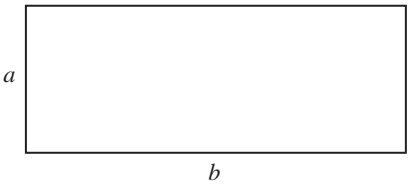


Fig. 7-1

Paralelogramo de altura h y base b

7.3. Área $= bh = ab \operatorname{sen}\theta$

7.4. Perímetro $= 2a + 2b$

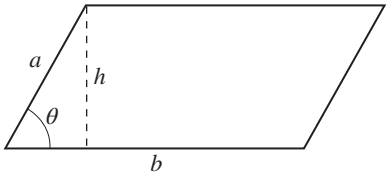


Fig. 7-2

Triángulo de altura h y base b

7.5. Área $= \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}ab \operatorname{sen}\theta$

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c) =$ semiperímetro

7.6. Perímetro $= a + b + c$

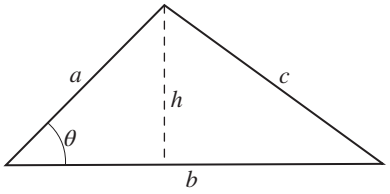


Fig. 7-3

Trapezoide de altura h y lados paralelos a y b

7.7. Área $= \frac{1}{2}h(a + b)$

7.8. Perímetro $= a + b + h\left(\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta} + \dfrac{1}{\operatorname{sen}\phi}\right)$

$= a + b + h(\csc\theta + \csc\phi)$

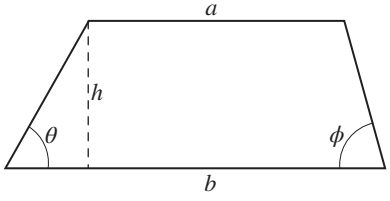


Fig. 7-4

Polígono regular de n lados iguales de longitud b

7.9. Área $= \frac{1}{4}nb^2 \cot\frac{\pi}{n} = \frac{1}{4}nb^2 \frac{\cos(\pi/n)}{\operatorname{sen}(\pi/n)}$

7.10. Perímetro $= nb$

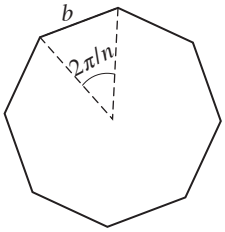


Fig. 7-5

Círculo de radio r

7.11. Área $= \pi r^2$

7.12. Perímetro $= 2\pi r$

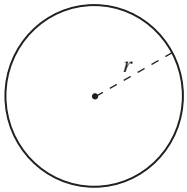


Fig. 7-6

Sector de un círculo de radio r

7.13. Área $= \frac{1}{2}r^2\theta$ [θ en radianes]

7.14. Longitud de arco $s = r\theta$

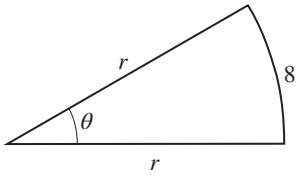


Fig. 7-7

Radio de la circunferencia inscrita en un triángulo de lados a, b, c

7.15. $r = \dfrac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c) =$ semiperímetro.

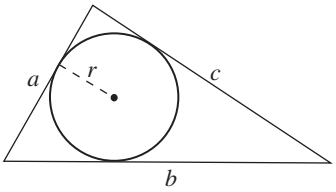


Fig. 7-8

Radio de la circunferencia circunscrita en un triángulo de lados a, b, c

7.16. $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$

donde $s = \frac{1}{2}(a + b + c) =$ semiperímetro.

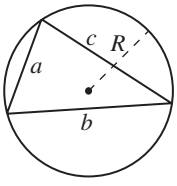


Fig. 7-9

Polígono regular de n lados inscrito en una circunferencia de radio r

7.17. Área $= \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\dfrac{2\pi}{n} = \frac{1}{2}nr^2 \operatorname{sen}\dfrac{360^\circ}{n}$

7.18. Perímetro $= 2nr \operatorname{sen}\dfrac{\pi}{n} = 2nr \operatorname{sen}\dfrac{180^\circ}{n}$

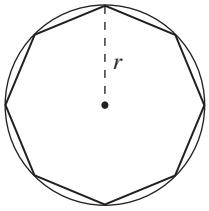


Fig. 7-10

Polígono regular de n lados circunscrito en una circunferencia de radio r

7.19. Área $= nr^2 \tan\dfrac{\pi}{n} = nr^2 \tan\dfrac{180^\circ}{n}$

7.20. Perímetro $= 2nr \tan\dfrac{\pi}{n} = 2nr \tan\dfrac{180^\circ}{n}$

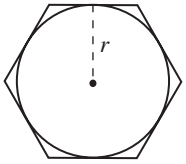


Fig. 7-11

Segmento de un círculo de radio r

7.21. Área de la parte sombreada $= \frac{1}{2}r^2(\theta - \operatorname{sen}\theta)$

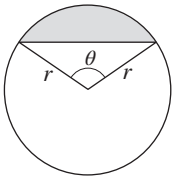


Fig. 7-12

Elipse de semieje mayor a y semieje menor b

7.22. Área $= \pi ab$

7.23. Perímetro $= 4a\displaystyle\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta$

$= 2\pi\sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2)}$ [aproximadamente]

donde $k = \sqrt{a^2 - b^2}/a$. Vea la tabla 29 para los valores numéricos.

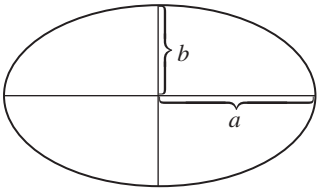


Fig. 7-13

Segmento de una parábola

7.24. Área $= \frac{2}{3}ab$

7.25. Longitud de arco $ABC = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + 16a^2} + \dfrac{b^2}{8a} \ln\left(\dfrac{4a + \sqrt{b^2 + 16a^2}}{b}\right)$

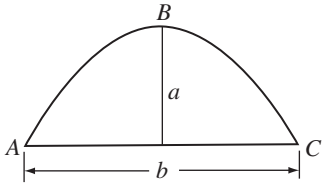


Fig. 7-14

Paralelepípedo rectangular de longitud a, altura b y ancho c

7.26. Volumen $= abc$

7.27. Superficie de área $= 2(ab + ac + bc)$

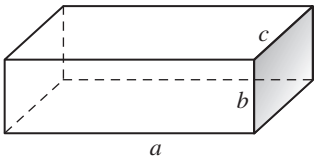


Fig. 7-15

Paralelepípedo de área de sección transversal A y altura h

7.28. Volumen $= Ah = abc \operatorname{sen}\theta$

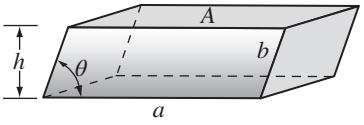


Fig. 7-16

Esfera de radio r

7.29. Volumen $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$

7.30. Superficie de área $= 4\pi r^2$

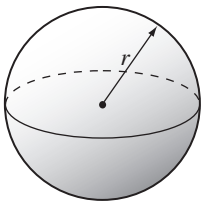


Fig. 7-17

Cilindro circular recto de radio r y altura h

7.31. Volumen $= \pi r^2 h$

7.32. Área de la superficie lateral $= 2\pi rh$

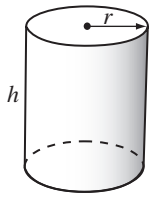


Fig. 7-18

Cilindro circular de radio r y altura inclinada l

7.33. Volumen $= \pi r^2 h = \pi r^2 l \operatorname{sen}\theta$

7.34. Área de la superficie lateral $= 2\pi rl = \dfrac{2\pi rh}{\operatorname{sen}\theta} = 2\pi rh \csc\theta$

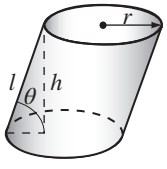


Fig. 7-19

Cilindro de área de sección transversal A y altura inclinada l

7.35. Volumen $= Ah = Al \operatorname{sen}\theta$

7.36. Área de la superficie lateral $= ph = pl \operatorname{sen}\theta$

Observe que las fórmulas 7.31 a 7.34 son casos especiales de las fórmulas 7.35 y 7.36.

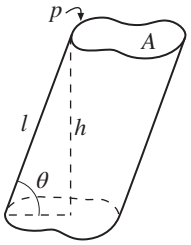


Fig. 7-20

Cono circular recto de radio r y altura h

7.37. Volumen $= \frac{1}{3}\pi r^2 h$

7.38. Área de la superficie lateral $= \pi r\sqrt{r^2 + h^2} = \pi rl$

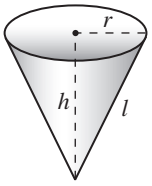


Fig. 7-21

Pirámide de área de la base A y altura h

7.39. Volumen $= \frac{1}{3}Ah$

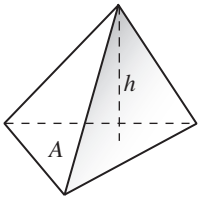


Fig. 7-22

Tapa esférica de radio r y altura h

7.40. Volumen (de la región sombreada) $= \frac{1}{3}\pi h^2(3r - h)$

7.41. Área de la superficie $= 2\pi rh$

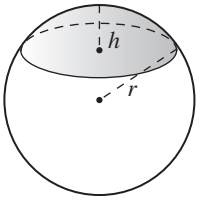


Fig. 7-23

Tronco de cono circular recto de radios a, b y altura h

7.42. Volumen $= \frac{1}{3}\pi h(a^2 + ab + b^2)$

7.43. Área de la superficie lateral $= \pi(a + b)\sqrt{h^2 + (b - a)^2}$

$= \pi(a + b)l$

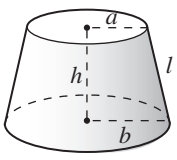


Fig. 7-24

Triángulo esférico de ángulos A, B, C sobre una esfera de radio r

7.44. Área del triángulo $ABC = (A + B + C - \pi)r^2$

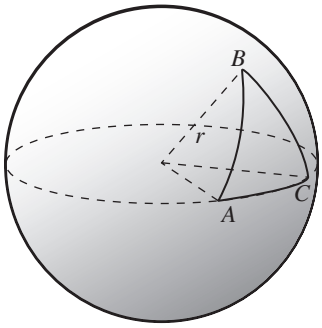


Fig. 7-25

Toro de radio interior a y radio exterior b

7.45. Volumen $= \frac{1}{4}\pi^2(a + b)(b - a)^2$

7.46. Área de la superficie $= \pi^2(b^2 - a^2)$

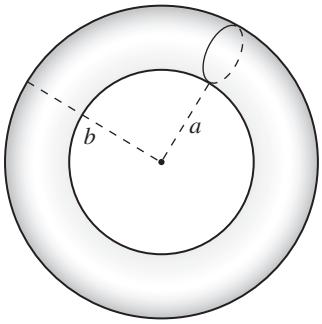


Fig. 7-26

Elipsoide de semiejes a, b, c

7.47. Volumen $= \frac{4}{3}\pi abc$

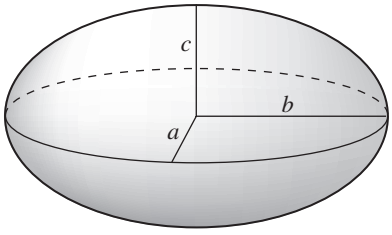


Fig. 7-27

Paraboloide de revolución

7.48. Volumen $= \frac{1}{2}\pi b^2 a$

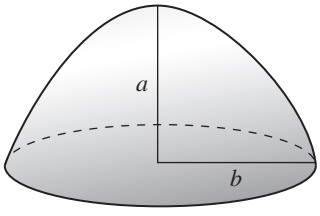


Fig. 7-28

8 FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

Distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

8.1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

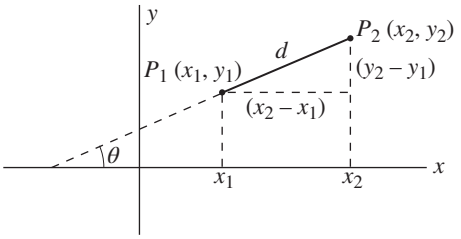


Fig. 8-1

Pendiente m de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

8.2. $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan\theta$

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$

8.3. $\dfrac{y - y_1}{x - x_1} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = m$ o $y - y_1 = m(x - x_1)$

8.4. $y = mx + b$

donde $b = y_1 - mx_1 = \dfrac{x_2 y_1 - x_1 y_2}{x_2 - x_1}$ es la *intersección* de la recta con el eje y, es decir, la *intersección* y.

Ecuación de la recta cuya intersección con el eje x es $a \neq 0$ y con y es $b \neq 0$

8.5. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$

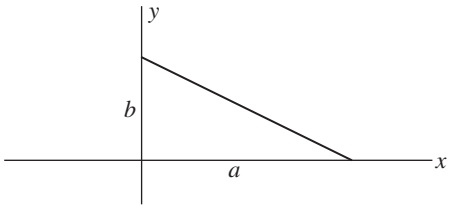


Fig. 8-2

Forma normal de la ecuación de una recta

8.6. $x \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha = p$

donde p = distancia perpendicular del origen O a la recta
y α = ángulo de inclinación de la perpendicular con la parte positiva del eje x.

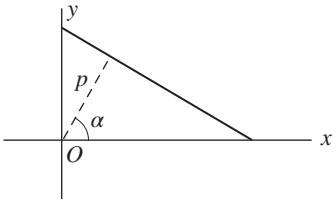


Fig. 8-3

Ecuación general de una recta

8.7. $Ax + By + C = 0$

Distancia de un punto (x_1, y_1) a la recta $Ax + By + C = 0$

8.8. $$\frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2}}$$

donde el signo se elige de forma que la distancia resulta no negativa.

Ángulo ψ entre dos rectas cuyas pendientes son m_1 y m_2

8.9. $$\tan\psi = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}$$

Las rectas son paralelas o coinciden si y solo si $m_1 = m_2$.
Las rectas son perpendiculares si y solo si $m_2 = -1/m_1$.

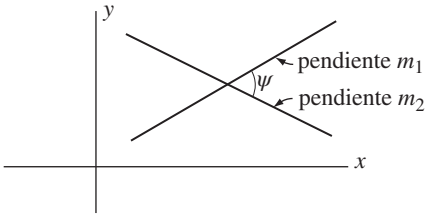


Fig. 8-4

Área de un triángulo con vértices en (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)

8.10. $$\text{Área} = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \pm\frac{1}{2}(x_1y_2 + y_1x_3 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_1x_2 - x_1y_3)$$

donde el signo se elige de forma que el área sea no negativa.
Si el área es cero, todos los puntos están sobre una misma recta.

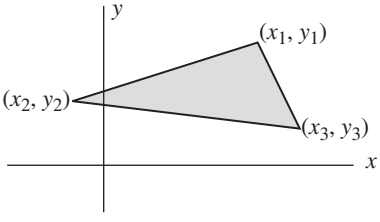


Fig. 8-5

Transformación de coordenadas que involucran una traslación pura

8.11. $\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \end{cases}$ o $\begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \end{cases}$

donde (x, y) son las coordenadas antes de la transformación (es decir, coordenadas relativas al sistema original xy), (x', y') son las coordenadas después de la transformación (es decir, relativas al sistema nuevo x', y'), y (x_0, y_0) son las coordenadas del nuevo origen O' relativo al sistema coordenado xy antes de la transformación.

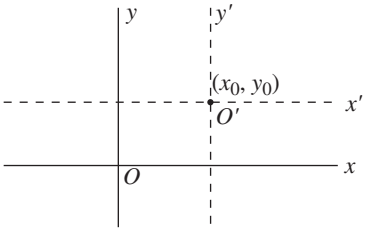


Fig. 8-6

Transformación de coordenadas que involucran una rotación pura

8.12. $\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha \end{cases}$ o $\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\operatorname{sen}\alpha \\ y' = y\cos\alpha - x\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$

donde el origen del sistema inicial $[xy]$ coincide con el del nuevo sistema de coordenadas $[x'y']$, pero el eje x' forma un ángulo α con el eje positivo x.

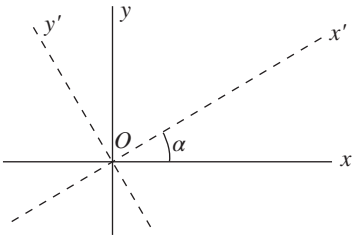


Fig. 8-7

Transformación de coordenadas que involucran traslación y rotación

8.13.

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\operatorname{sen}\alpha + x_0 \\ y = x'\operatorname{sen}\alpha + y'\cos\alpha + y_0 \end{cases}$$

o

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\operatorname{sen}\alpha \\ y' = (y - y_0)\cos\alpha - (x - x_0)\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

donde el nuevo origen O' del sistema coordenado $x'y'$ tiene coordenadas (x_0, y_0) relativas al sistema original xy y el eje x' forma un ángulo α con el eje positivo x.

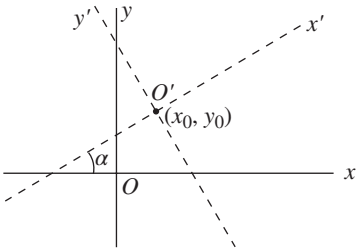


Fig. 8-8

Coordenadas polares (r, θ)

Un punto P puede ser localizado por medio de coordenadas rectangulares (x, y) o de coordenadas polares (r, θ). La transformación entre estas coordenadas es como sigue:

8.14. $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\operatorname{sen}\theta \end{cases}$ o $\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \end{cases}$

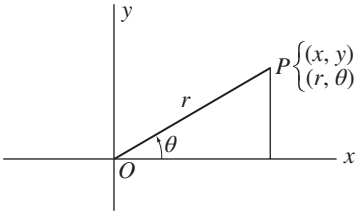


Fig. 8-9

Ecuación de la circunferencia de radio R con centro en (x_0, y_0)

8.15. $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$

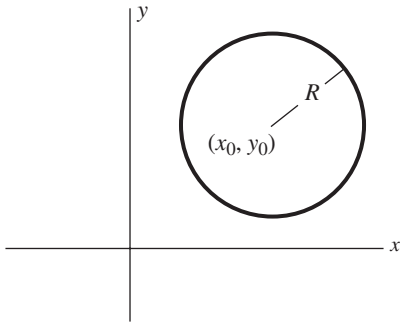


Fig. 8-10

Ecuación de la circunferencia de radio R que pasa por el origen

8.16. $r = 2R\cos(\theta - \alpha)$

donde (r, θ) son las coordenadas polares de cualquier punto sobre la circunferencia y (R, α) son las coordenadas polares del centro de la circunferencia.

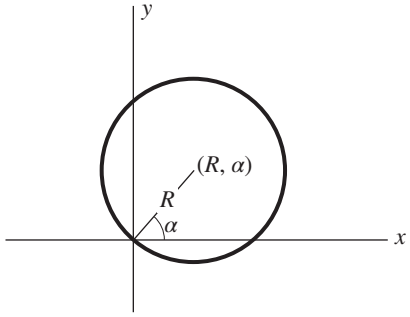


Fig. 8-11

Cónicas (elipse, parábola o hipérbola)

Si un punto P se mueve de tal manera que su distancia desde un punto fijo (llamado *foco*) dividida entre su distancia desde una recta fija (llamada *directriz*) resulta ser una constante ϵ (llamada *excentricidad*), la curva trazada por P se conoce como *cónica* (estas curvas se llaman así debido a que pueden obtenerse intersecando un cono y un plano a diferentes ángulos).

Si el foco se sitúa en el origen O, la ecuación de una cónica en coordenadas polares (r, θ) es, si $OQ = p$ y $LM = D$ (vea la figura 8-12),

8.17. $$r = \frac{p}{1 - \epsilon\cos\theta} = \frac{\epsilon D}{1 - \epsilon\cos\theta}$$

La cónica es:
(i) una elipse si $\epsilon < 1$
(ii) una parábola si $\epsilon = 1$
(iii) una hipérbola si $\epsilon > 1$

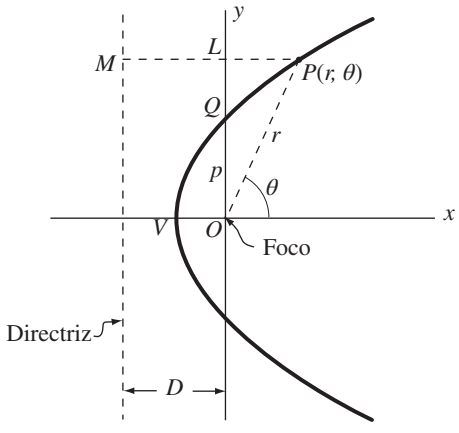


Fig. 8-12

Elipse con centro $C(x_0, y_0)$ y eje mayor paralelo al eje x

8.18. Longitud del eje mayor $A'A = 2a$

8.19. Longitud del eje menor $B'B = 2b$

8.20. La distancia del centro C al foco F o F' es:

$$c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

8.21. Excentricidad $= \epsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

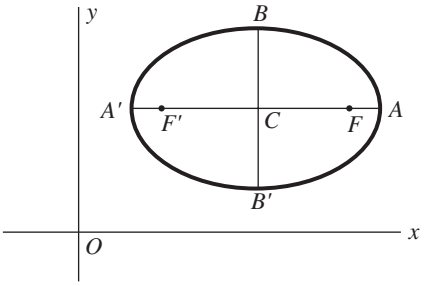


Fig. 8-13

8.22. Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

8.23. Ecuación en coordenadas polares si C está en el origen O: $r^2 = \dfrac{a^2 b^2}{a^2 \operatorname{sen}^2\theta + b^2 \cos^2\theta}$

8-24. Ecuación en coordenadas polares si C está en el eje x y F' está en el origen O: $r = \dfrac{a(1 - \epsilon^2)}{1 - \epsilon \cos\theta}$

8.25. Si P es cualquier punto en la elipse, $PF + PF' = 2a$.

Si el eje mayor es paralelo al eje y, es necesario intercambiar x y y en lo anterior o reemplazar θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ (o $90° - \theta$).

Parábola con eje paralelo al eje x

Si el vértice está situado en $A\ (x_0, y_0)$ y la distancia de A al foco F es $a > 0$, la ecuación de la parábola es:

8.26. $(y - y_0)^2 = 4a(x - x_0)$ si la parábola abre hacia la derecha (figura 8-14)

8.27. $(y - y_0)^2 = -4a(x - x_0)$ si la parábola abre hacia la izquierda (figura 8-15)

Si el foco se encuentra en el origen (figura 8-16), la ecuación en coordenadas polares es:

8.28. $r = \dfrac{2a}{1 - \cos\theta}$

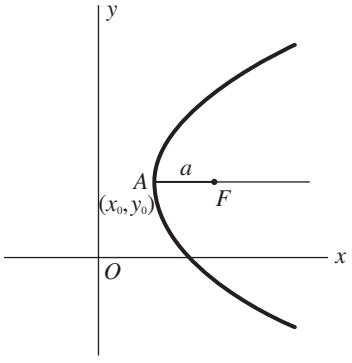


Fig. 8-14

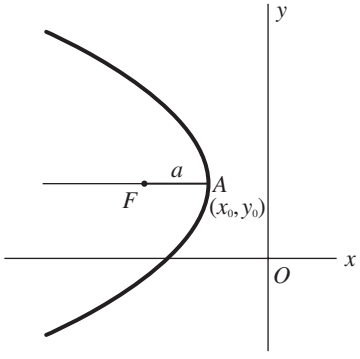


Fig. 8-15

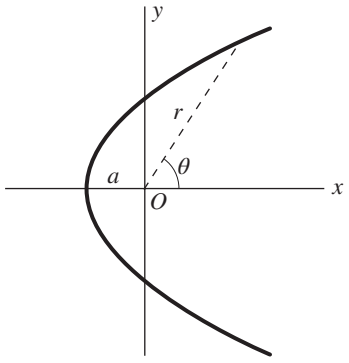


Fig. 8-16

En caso de que el eje sea paralelo al eje y, es necesario intercambiar x y y o reemplazar θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ (o $90° - \theta$).

Hipérbola con centro $C(x_0, y_0)$ y eje mayor paralelo al eje x

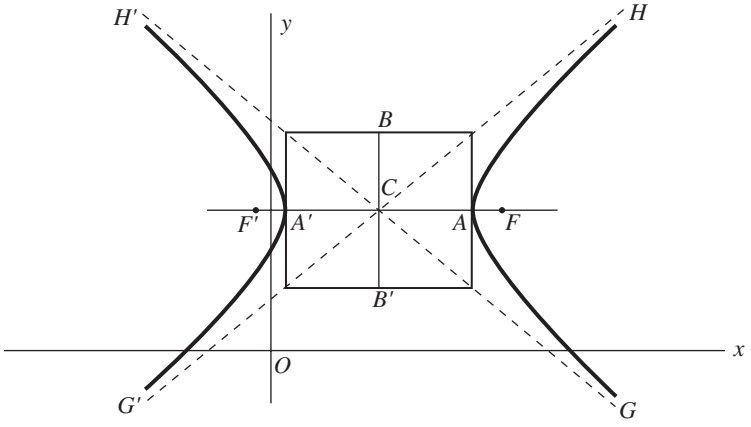


Fig. 8-17

8.29. Longitud del eje mayor $A'A = 2a$

8.30. Longitud del eje menor $B'B = 2b$

8.31. La distancia del centro C al foco F o $F' = c = \sqrt{a^2 + b^2}$

8.32. Excentricidad $\epsilon = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2}}{a}$

8.33. Ecuación en coordenadas rectangulares: $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$

8.34. Pendientes de las asíntotas $G'H$ y $GH' = \pm\dfrac{b}{a}$

8.35. Ecuación en coordenadas polares si C está en el origen O: $r^2 = \dfrac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2\theta - a^2 \operatorname{sen}^2\theta}$

8.36. Ecuación en coordenadas polares si C está en el eje x y F' está en el origen O: $r = \dfrac{a(\epsilon^2 - 1)}{1 - \epsilon\cos\theta}$

8.37. Si P es cualquier punto en la hipérbola, $PF - PF' = \pm 2a$ (el signo depende de la rama).

Si el eje mayor es paralelo al eje y, es necesario intercambiar x y y en lo anterior o reemplazar θ por $\frac{1}{2}\pi - \theta$ (o $90° - \theta$).

9 CURVAS ESPECIALES EN EL PLANO

Lemniscata

9.1. Ecuación en coordenadas polares:

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta$$

9.2. Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2)$$

9.3. Ángulo formado por AB' o $A'B$ y el eje $x = 45°$

9.4. Área contenida en uno de los lazos $= a^2$

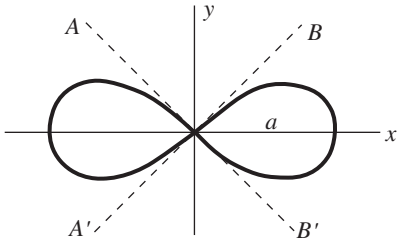


Fig. 9-1

Cicloide

9.5. Ecuaciones en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = a(\phi - \operatorname{sen}\phi) \\ y = a(1 - \cos\phi) \end{cases}$$

9.6. Área de cada arco $= 3\pi a^2$

9.7. Longitud de arco de un arco $= 8a$

Esta es la curva escrita por un punto P de una circunferencia de radio a rodando sobre el eje x.

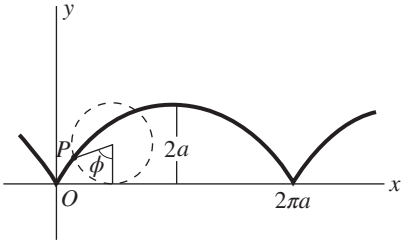


Fig. 9-2

Hipocicloide de cuatro cúspides

9.8. Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

9.9. Ecuaciones en forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = a\cos^3\theta \\ y = a\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

9.10. Área limitada por la curva $= \frac{3}{8}\pi a^2$

9.11. Longitud de arco de toda la curva $= 6a$

Esta es la curva descrita por un punto P en una circunferencia de radio $a/4$ cuando rueda sobre el interior de un círculo de radio a.

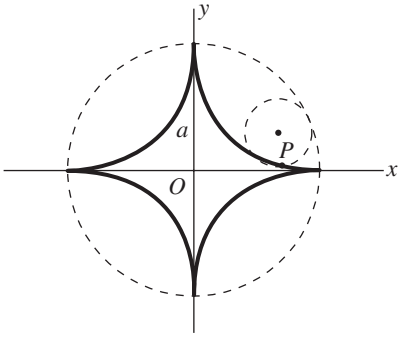


Fig. 9-3

Cardioide

9.12. Ecuación: $r = 2a(1 + \cos\theta)$

9.13. Área encerrada por la curva $= 6\pi a^2$

9.14. Longitud de arco de la curva $= 16a$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio a a medida que rueda sobre la parte exterior de una circunferencia fija de radio a. Esta curva es un caso especial del caracol de Pascal (vea la fórmula 9.32).

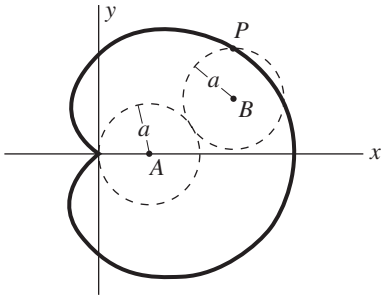


Fig. 9-4

Catenaria

9.15. Ecuación: $y = \dfrac{a}{2}(e^{x/a} + e^{-x/a}) = a\cosh\dfrac{x}{a}$

Esta es la curva que forma una cadena uniforme pesada al ser suspendida verticalmente de dos puntos fijos A y B.

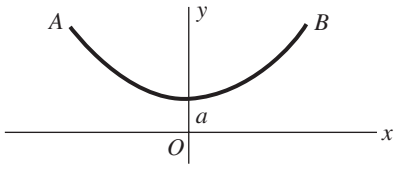


Fig. 9-5

Rosa de tres pétalos

9.16. Ecuación: $r = a\cos 3\theta$

La ecuación $r = a$ sen 3θ corresponde a la curva similar que se obtiene al rotar la curva de la figura 9-6 30° o $\pi/6$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En general, $r = a\cos n\theta$ o $r = a$ sen $n\theta$ tiene n pétalos si n es impar.

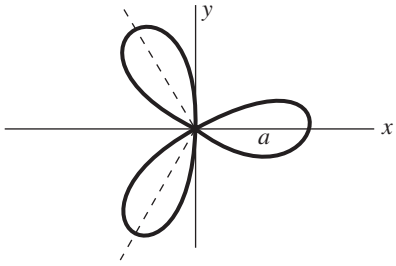


Fig. 9-6

Rosa de cuatro pétalos

9.17. Ecuación: $r = a\cos 2\theta$

La ecuación $r = a$ sen 2θ corresponde a la curva similar que se obtiene al rotar la curva de la figura 9-7 45° o $\pi/4$ radianes en sentido contrario a las manecillas del reloj.

En general, $r = a\cos n\theta$ o $r = a$ sen $n\theta$ tiene $2n$ pétalos si n es par.

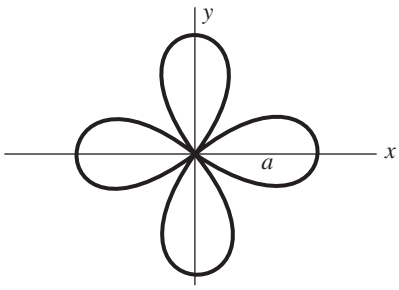


Fig. 9-7

Epicicloide

9.18. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = (a+b)\cos\theta - b\cos\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \\ y = (a+b)\operatorname{sen}\theta - b\operatorname{sen}\left(\dfrac{a+b}{b}\right)\theta \end{cases}$$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio b a medida que rueda sobre la parte exterior de una circunferencia de radio a.

La cardioide (figura 9-4) es un caso especial de la epicicloide.

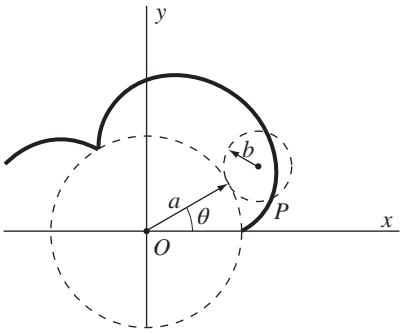


Fig. 9-8

Hipocicloide general

9.19. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = (a-b)\cos\phi + b\cos\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\phi \\ y = (a-b)\operatorname{sen}\phi - b\operatorname{sen}\left(\dfrac{a-b}{b}\right)\phi \end{cases}$$

Esta es la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio b a medida que rueda sobre la parte interior de una circunferencia de radio a.

Si $b = a/4$, la curva obtenida es la que se muestra en la figura 9-3.

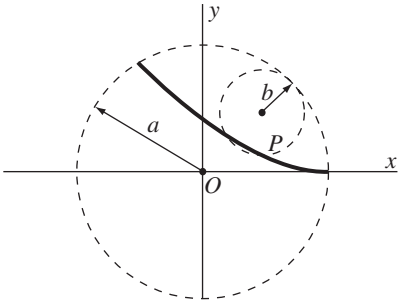


Fig. 9-9

Trocoide

9.20. Ecuaciones en forma paramétrica: $\begin{cases} x = a\phi - b\operatorname{sen}\phi \\ y = a - b\cos\phi \end{cases}$

Esta es la curva descrita por un punto P a una distancia b del centro de una circunferencia de radio a a medida que esta rueda sobre el eje x.

Si $b < a$, la curva es la figura 9-10 y se llama *cicloide acortada*.

Si $b > a$, la curva es la figura 9-11 y se llama *cicloide alargada*.

Si $b = a$, la curva es la cicloide de la figura 9-2.

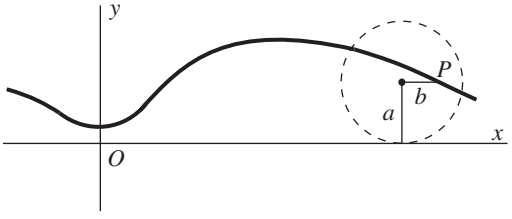


Fig. 9-10

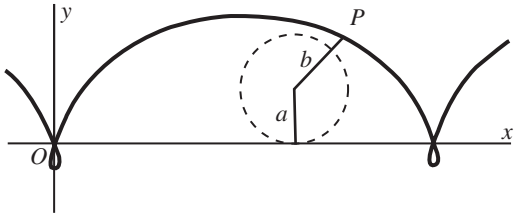


Fig. 9-11

Tractriz

9.21. Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = a(\ln \cot \frac{1}{2}\phi - \cos \phi) \\ y = a \operatorname{sen} \phi \end{cases}$

Esta es la curva descrita por el punto extremo P de una cuerda tensa PQ de longitud a a medida que el otro extremo Q se mueve a lo largo del eje x.

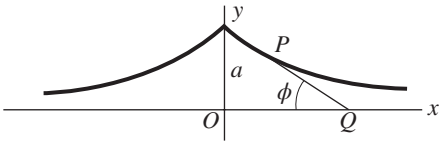


Fig. 9-12

Curva de Agnesi

9.22. Ecuación en coordenadas rectangulares: $y = \dfrac{8a^3}{x^2 + 4a^2}$

9.23. Ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x = 2a \cot \theta \\ y = a(1 - \cos 2\theta) \end{cases}$

En la figura 9-13 la línea variable QA intersecta a la recta $y = 2a$ y a la circunferencia de radio a con centro en $(0, a)$ en A y B repectivamente. Cualquier punto P de la curva se localiza trazando paralelas a los ejes x y y de modo que pasen por B y A, respectivamente, y determinando el punto P de intersección.

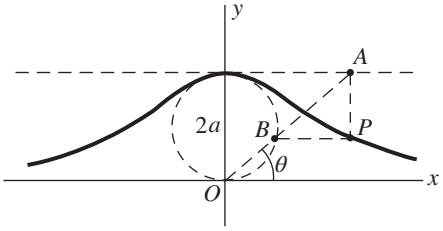


Fig. 9-13

Folio de Descartes

9.24. Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

9.25. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1 + t^3} \\ y = \dfrac{3at^2}{1 + t^3} \end{cases}$$

9.26. Área del lazo $= \dfrac{3}{2}a^2$

9.27. Ecuación de la asíntota: $x + y + a = 0$

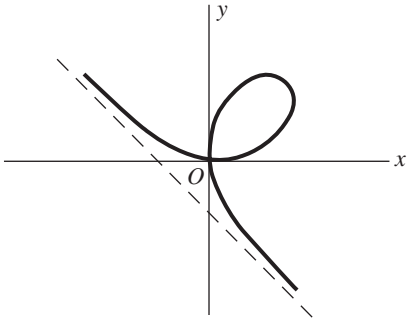


Fig. 9-14

Involuta de una circunferencia

9.28. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = a(\cos \phi + \phi \operatorname{sen} \phi) \\ y = a(\operatorname{sen} \phi - \phi \cos \phi) \end{cases}$$

Esta es la curva descrita por el punto extremo de una cuerda enrollada en una circunferencia de radio a a medida que se desenvuelve mientras se mantiene tensa.

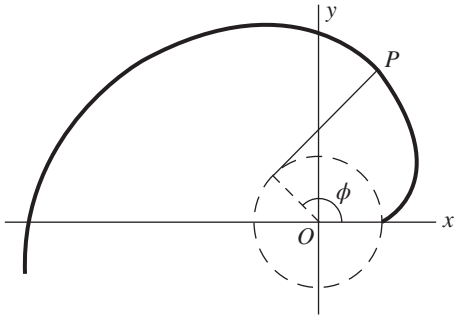


Fig. 9-15

Evoluta de una elipse

9.29. Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$(ax)^{2/3} + (by)^{2/3} = (a^2 - b^2)^{2/3}$$

9.30. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} ax = (a^2 - b^2)\cos^3\theta \\ by = (a^2 - b^2)\operatorname{sen}^3\theta \end{cases}$$

Esta curva es la envolvente de las rectas normales a la elipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ que se muestra de manera punteada en la figura 9-16.

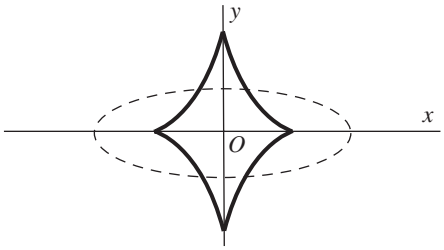


Fig. 9-16

Óvalos de Cassini

9.31. Ecuación polar: $r^4 + a^4 - 2a^2r^2\cos 2\theta = b^4$

Esta es la curva descrita por un punto P de tal manera que el producto de sus distancias a partir de dos puntos fijos (situados a una distancia $2a$ uno del otro) es una constante b^2.

La curva adopta la forma de la figura 9-17 o la figura 9-18 según $b < a$ o $b > a$, respectivamente.

Si $b = a$, la curva es la *lemniscata* (figura 9-1).

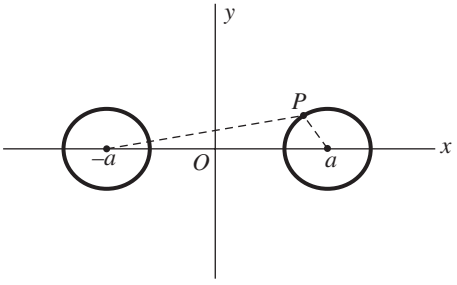


Fig. 9-17

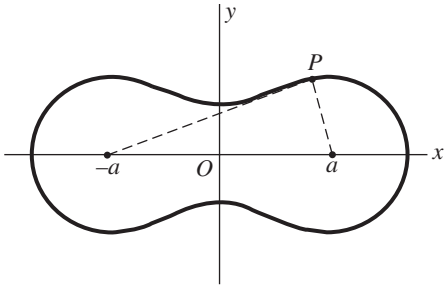


Fig. 9-18

Caracol de Pascal

9.32. Ecuación polar: $r = b + a\cos\theta$

Sea OQ una recta que une el origen O con un punto Q cualquiera de una circunferencia de diámetro a que pasa por O. Entonces esta curva es el lugar geométrico de todos los puntos P para los cuales $PQ = b$.

La curva adopta la forma de la figura 9-19 o la figura 9-20 según $2a > b > a$ o $b < a$, respectivamente. Si $b = a$, la curva es una *cardioide* (figura 9-4). Si $b \geqq 2a$, la curva es convexa.

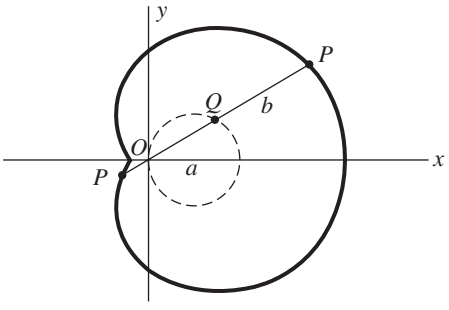


Fig. 9-19

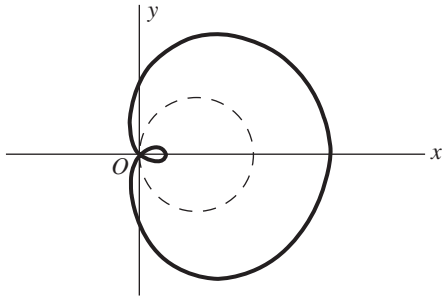


Fig. 9-20

Cisoide de Diocles

9.33. Ecuación en coordenadas rectangulares:

$$y^2 = \frac{x^2}{2a - x}$$

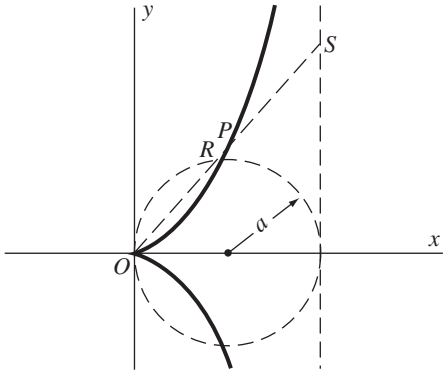


Fig. 9-21

9.34. Ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = 2a\,\text{sen}^2\,\theta \\ y = \dfrac{2a\,\text{sen}^3\,\theta}{\cos\theta} \end{cases}$$

Esta es la curva descrita por un punto P que se mueve de tal manera que la distancia OP = distancia RS. Se emplea en el problema de la *duplicación del cubo*, este consiste en encontrar el lado que debe tener un cubo, de modo que contenga el doble del volumen de un cubo dado.

Espiral de Arquímedes

9.35. Ecuación polar: $r = a\theta$

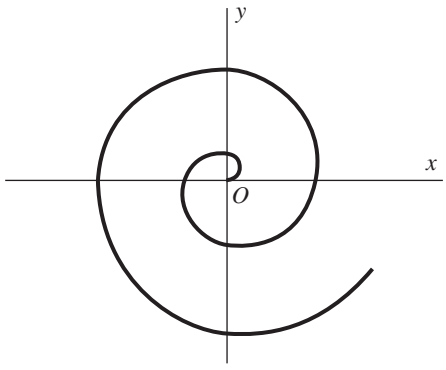


Fig. 9-22

10 FÓRMULAS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA ESPACIAL

Distancia d entre dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

10.1. $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

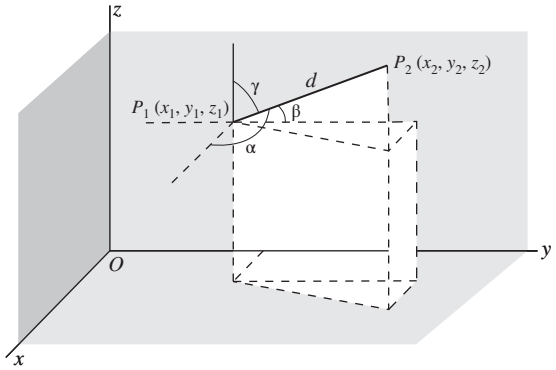


Fig. 10-1

Cosenos directores de una recta que une dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$

10.2. $l = \cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{d}, \quad m = \cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{d}, \quad n = \cos\gamma = \dfrac{z_2 - z_1}{d}$

donde α, β, γ denotan los ángulos que forma la línea P_1P_2 con la parte positiva de los ejes x, y, z, respectivamente, y d está dada por 10.1 (vea la figura 10-1).

Relación entre los cosenos directores

10.3. $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \quad \text{o} \quad l^2 + m^2 + n^2 = 1$

Números directores

Los números L, M, N, que son proporcionales a los cosenos directores l, m, n se llaman *números directores*. La relación entre ellos está dada por:

10.4. $l = \dfrac{L}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad m = \dfrac{M}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \quad n = \dfrac{N}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}$

Ecuación de la recta que une dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en forma estándar

10.5. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1} \quad \text{o} \quad \dfrac{x - x_1}{l} = \dfrac{y - y_1}{m} = \dfrac{z - z_1}{n}$

Estas ecuaciones también son válidas si se reemplaza l, m, n por L, M, N, respectivamente.

Ecuación de la recta que une dos puntos $P_1(x_1, y_1, z_1)$ y $P_2(x_2, y_2, z_2)$ en forma paramétrica

10.6. $x = x_1 + lt,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt$

Estas ecuaciones también son válidas si se reemplaza l, m, n por L, M, N, respectivamente.

Ángulo ϕ entre dos rectas con cosenos directores l_1, m_1, n_1 y l_2, m_2, n_2

10.7. $\cos\phi = l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2$

Ecuación general de un plano

10.8. $Ax + By + Cz + D = 0$ (A, B, C, D son constantes)

Ecuación de un plano que pasa por los puntos (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)

10.9. $$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

o

10.10. $$\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}(x - x_1) + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}(y - y_1) + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}(z - z_1) = 0$$

Ecuación de un plano en forma segmentaria

10.11. $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} + \dfrac{z}{c} = 1$

donde a, b, c son las intersecciones con los ejes x, y, z, respectivamente.

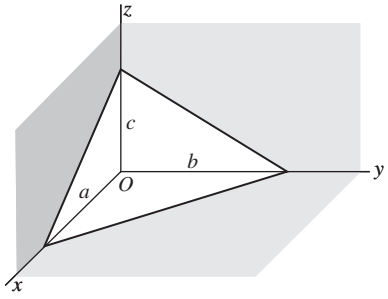


Fig. 10-2

Ecuación de la recta que pasa por (x_0, y_0, z_0) y es perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

10.12. $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$ o $x = x_0 + At,\ y = y_0 + Bt,\ z = z_0 + Ct$

Observe que los números directores de una recta perpendicular al plano $Ax + By + Cz + D = 0$ son A, B, C.

Distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) al plano $Ax + By + Cz + D = 0$

10.13. $$\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

donde el signo se elige de forma que la distancia sea no negativa.

Forma normal de la ecuación de un plano

10.14. $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = p$

donde p = distancia perpendicular desde O al punto P del plano, mientras que α, β, γ son los ángulos que forma OP con los ejes positivos x, y, z.

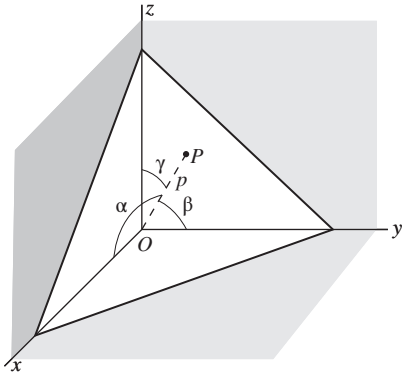


Fig. 10-3

Transformación de coordenadas que involucran traslación pura

10.15. $$\begin{cases} x = x' + x_0 \\ y = y' + y_0 \\ z = z' + z_0 \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} x' = x - x_0 \\ y' = y - y_0 \\ z' = z - z_0 \end{cases}$$

donde (x, y, z) son las coordenadas antes de la transformación (es decir, coordenadas relativas al sistema original xyz), (x', y', z') son las coordenadas después de la transformación (es decir, relativas al sistema nuevo $x'y'z'$), y (x_0, y_0, z_0) son las coordenadas del nuevo origen O' relativo al sistema coordenado xyz antes de la transformación.

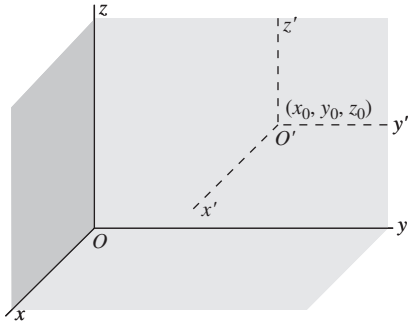


Fig. 10-4

Transformación de coordenadas que involucran rotación pura

10.16. $$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' \end{cases}$$

o $$\begin{cases} x' = l_1x + m_1y + n_1z \\ y' = l_2x + m_2y + n_2z \\ z' = l_3x + m_3y + n_3z \end{cases}$$

donde el origen del sistema inicial xyz coincide con el del nuevo sistema de coordenadas $x'y'z'$ y $l_1, m_1, n_1; l_2, m_2, n_2; l_3, m_3, n_3$ son los cosenos directores de los ejes x', y', z' relativos a los ejes x, y, z, respectivamente.

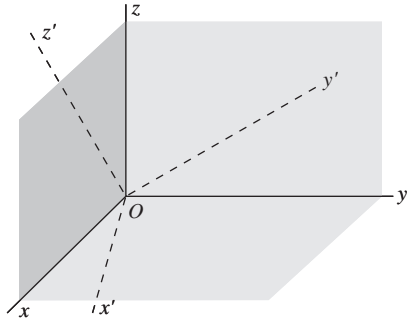


Fig. 10-5

Transformación de coordenadas que involucran traslación y rotación

10.17.
$$\begin{cases} x = l_1x' + l_2y' + l_3z' + x_0 \\ y = m_1x' + m_2y' + m_3z' + y_0 \\ z = n_1x' + n_2y' + n_3z' + z_0 \end{cases}$$

o
$$\begin{cases} x' = l_1(x - x_0) + m_1(y - y_0) + n_1(z - z_0) \\ y' = l_2(x - x_0) + m_2(y - y_0) + n_2(z - z_0) \\ z' = l_3(x - x_0) + m_3(y - y_0) + n_3(z - z_0) \end{cases}$$

donde el nuevo origen O' del sistema coordenado $x'y'z'$ tiene coordenadas (x_0, y_0, z_0) relativas al sistema original xyz y

$$l_1, m_1, n_1;\ l_2, m_2, n_2;\ l_3, m_3, n_3$$

son los cosenos directores de los ejes x', y', z' relativos a los ejes x, y, z, respectivamente.

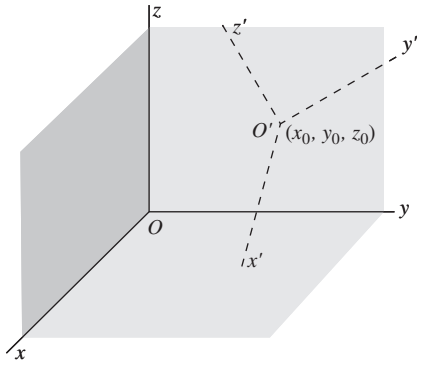


Fig. 10-6

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

Un punto P puede ser localizado por medio de las coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (vea la figura 10-7) o de coordenadas rectangulares (x, y, z).

La transformación entre estas coordenadas es como sigue:

10.18.
$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z = z \end{cases} \quad \text{o} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \tan^{-1}(y/x) \\ z = z \end{cases}$$

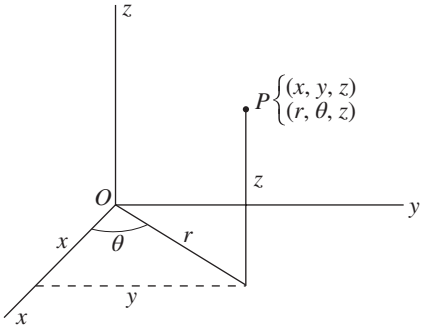


Fig. 10-7

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

Un punto P puede ser localizado por medio de coordenadas polares (r, θ, ϕ) (vea la figura 10-8) o de coordenadas rectangulares (x, y, z).

La transformación entre estas coordenadas es como sigue:

10.19.
$$\begin{cases} x = r\,\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi \\ y = r\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi \\ z = r\cos\theta \end{cases}$$

o
$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \phi = \tan^{-1}(y/x) \\ \theta = \cos^{-1}(z/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \end{cases}$$

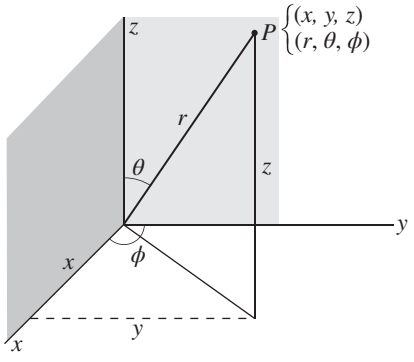


Fig. 10-8

Ecuación de la esfera en coordenadas rectangulares

10.20. $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$

donde el centro de la esfera es (x_0, y_0, z_0) y el radio es R.

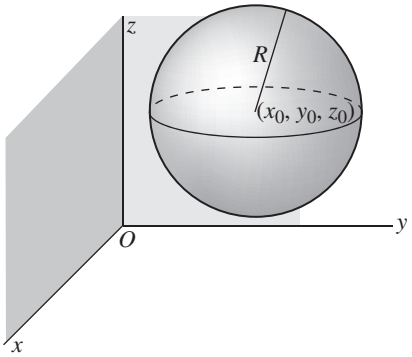


Fig. 10-9

Ecuación de la esfera en coordenadas cilíndricas

10.21. $r^2-2r_0\,r\cos(\theta-\theta_0)+r_0^2+(z-z_0)^2=R^2$

donde el centro de la esfera es (r_0, θ_0, z_0) en coordenadas cilíndricas y el radio R.

Cuando el centro está en el origen, la ecuación es:

10.22. $r^2+z^2=R^2$

Ecuación de la esfera en coordenadas esféricas

10.23. $r^2+r_0^2-2r_0\,r\,\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta_0\cos(\phi-\phi_0)=R^2$

donde el centro de la esfera es (r_0, θ_0, ϕ_0) en coordenadas esféricas y el radio R.

Cuando el centro está en el origen, la ecuación es:

10.24. $r=R$

Ecuación del elipsoide con centro en (x_0, y_0, z_0) y semiejes a, b, c

10.25. $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2}+\dfrac{(y-y_0)^2}{b^2}+\dfrac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$

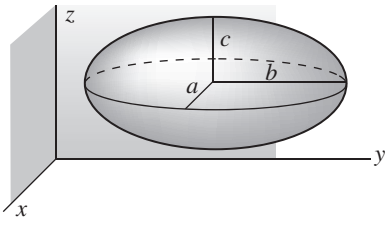


Fig. 10-10

Cilindro elíptico cuyo eje coincide con el eje z

10.26. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$

donde a, b son los semiejes de la sección transversal de la elipse.
Si $b = a$, entonces se vuelve un cilindro circular de radio a.

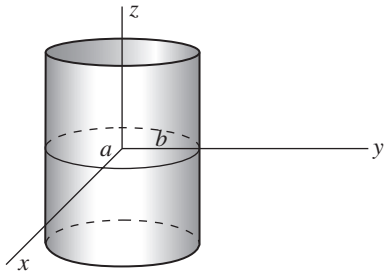


Fig. 10-11

Cono elíptico cuyo eje coincide con el eje z

10.27. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=\dfrac{z^2}{c^2}$

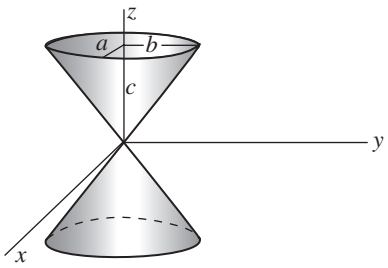


Fig. 10-12

Hiperboloide de una hoja

10.28. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

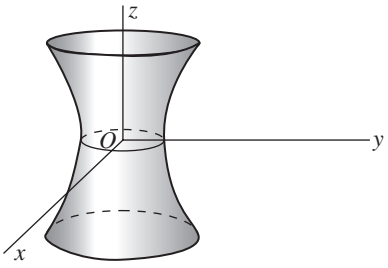


Fig. 10-13

Hiperboloide de dos hojas

10.29. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$

Note la orientación de los ejes en la figura 10-14.

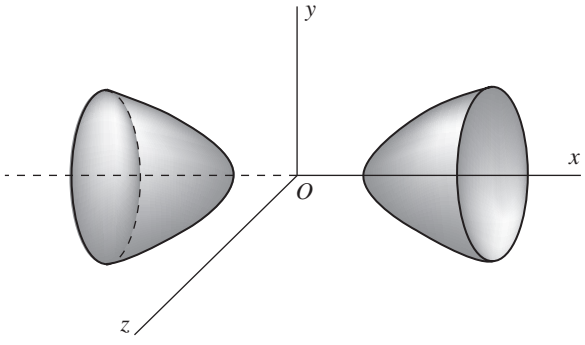


Fig. 10-14

Paraboloide elíptico

10.30. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

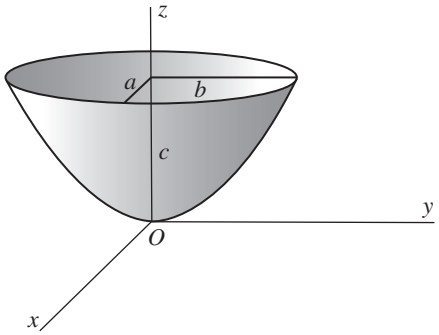


Fig. 10-15

Paraboloide hiperbólico

10.31. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}$

Note la orientación de los ejes en la figura 10-16.

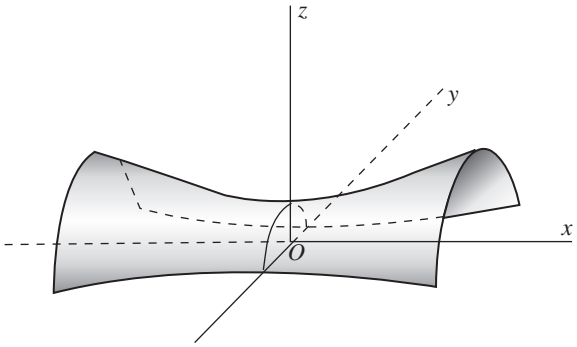


Fig. 10-16

11 MOMENTOS DE INERCIA ESPECIALES

La siguiente tabla muestra los momentos de inercia de distintos cuerpos rígidos de masa M. En todos los casos se supone que el cuerpo tiene densidad uniforme (es decir, constante).

TIPO DE CUERPO RÍGIDO		MOMENTO DE INERCIA
11.1.	Varilla delgada de longitud a	
(a)	respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por su centro de masa.	$\frac{1}{12}Ma^2$
(b)	respecto de un eje perpendicular a la varilla que pasa por uno de los extremos.	$\frac{1}{3}Ma^2$
11.2.	Paralelepípedo rectangular de lados a, b, c	
(a)	respecto del eje paralelo a c que pasa por el centro de la cara ab.	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
(b)	respecto del eje que pasa por el centro de la cara bc y es paralelo a c.	$\frac{1}{12}M(4a^2+b^2)$
11.3.	Placa rectangular delgada de lados a, b	
(a)	respecto del eje perpendicular a la placa que pasa por el centro.	$\frac{1}{12}M(a^2+b^2)$
(b)	respecto del eje paralelo al lado b que pasa por el centro.	$\frac{1}{12}Ma^2$
11.4.	Cilindro circular de radio a y altura h	
(a)	respecto del eje del cilindro.	$\frac{1}{2}Ma^2$
(b)	respecto del eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al eje del cilindro.	$\frac{1}{12}M(h^2+3a^2)$
(c)	respecto del eje que coincide con el diámetro en uno de los extremos.	$\frac{1}{12}M(4h^2+3a^2)$
11.5.	Cilindro circular hueco de radio exterior a, radio interior b y altura h	
(a)	respecto del eje del cilindro.	$\frac{1}{2}M(a^2+b^2)$
(b)	respecto del eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al eje del cilindro.	$\frac{1}{12}M(3a^2+3b^2+h^2)$
(c)	respecto del eje que coincide con el diámetro en uno de los extremos.	$\frac{1}{12}M(3a^2+3b^2+4h^2)$
11.6.	Placa circular de radio a	
(a)	respecto del eje perpendicular a la placa que pasa por el centro.	$\frac{1}{2}Ma^2$
(b)	respecto del eje que coincide con el diámetro.	$\frac{1}{4}Ma^2$

11.7.	Placa circular hueca o anillo de radio exterior a y radio interior b	
(a)	respecto del eje perpendicular al plano de la placa que pasa por el centro.	$\frac{1}{2}M(a^2+b^2)$
(b)	respecto de un eje que coincide con el diámetro.	$\frac{1}{4}M(a^2+b^2)$
11.8.	Anillo circular delgado de radio a	
(a)	respecto del eje perpendicular al plano del anillo que pasa por el centro.	Ma^2
(b)	respecto de un eje que coincide con el diámetro.	$\frac{1}{2}Ma^2$
11.9.	Esfera de radio a	
(a)	respecto de un eje que coincide con el diámetro.	$\frac{2}{5}Ma^2$
(b)	respecto de un eje tangente a la superficie.	$\frac{7}{5}Ma^2$
11.10.	Esfera hueca de radio exterior a y radio interior b	
(a)	respecto de un eje que coincide con el diámetro.	$\frac{2}{5}M(a^5-b^5)/(a^3-b^3)$
(b)	respecto de un eje tangente a la superficie.	$\frac{2}{5}M(a^5-b^5)/(a^3-b^3)+Ma^2$
11.11.	Cascarón esférico hueco de radio a	
(a)	respecto de un eje que coincide con el diámetro.	$\frac{2}{3}Ma^2$
(b)	respecto de un eje tangente a la superficie.	$\frac{5}{3}Ma^2$
11.12.	Elipsoide con semiejes a, b, c	
(a)	respecto del eje que coincide con el semieje c.	$\frac{1}{5}M(a^2+b^2)$
(b)	respecto de un eje tangente a la superficie, paralelo al semieje c y a una distancia a del centro.	$\frac{1}{5}M(6a^2+b^2)$
11.13.	Cono circular de radio a y altura h	
(a)	respecto del eje del cono.	$\frac{3}{10}Ma^2$
(b)	respecto del eje que pasa por el vértice y es perpendicular al eje.	$\frac{3}{20}M(a^2+4h^2)$
(c)	respecto del eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al eje.	$\frac{3}{80}M(4a^2+h^2)$
11.14.	Toro de radio exterior a y radio interior b	
(a)	respecto del eje que pasa por el centro de masa y es perpendicular al plano del toro.	$\frac{1}{4}M(7a^2-6ab+3b^2)$
(b)	respecto del eje que pasa por el centro de masa y es paralelo al plano del toro.	$\frac{1}{4}M(9a^2-10ab+5b^2)$

12 FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Definición de las funciones trigonométricas de un triángulo rectángulo

El triángulo ABC tiene un ángulo recto (90°) en C y lados de longitud a, b, c. Las funciones trigonométricas de un ángulo A se definen como sigue:

12.1. *Seno* de $A = \operatorname{sen} A = \dfrac{a}{c} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$

12.2. *Coseno* de $A = \cos A = \dfrac{b}{c} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$

12.3. *Tangente* de $A = \tan A = \dfrac{a}{b} = \dfrac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$

12.4. *Cotangente* de $A = \cot A = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{cateto adyacente}}{\text{cateto opuesto}}$

12.5. *Secante* de $A = \sec A = \dfrac{c}{b} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto adyacente}}$

12.6. *Cosecante* de $A = \csc A = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\text{hipotenusa}}{\text{cateto opuesto}}$

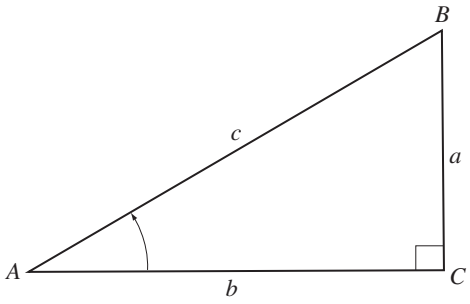


Fig. 12-1

Extensión de las funciones trigonométricas a ángulos mayores de 90°

Considere un sistema de coordenadas xy (vea la figura 12-2 y 12-3). Un punto P en el plano xy tiene coordenadas (x, y) en donde x es positiva sobre OX y negativa a lo largo de OX', mientras que y es positiva sobre OY y negativa a lo largo de OY'. La distancia del punto O al origen P es positiva y denotada por $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. El ángulo A formado a partir de OX en el *sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj* es considerado *positivo*. Si el ángulo se forma a partir de OX en el *sentido de las manecillas del reloj*, se considera *negativo*. Llamamos a $X'OX$ y a $Y'OY$, el eje x y el eje y, respectivamente.

Los diferentes cuadrantes del plano se denotan por los números romanos I, II, III y IV, son llamados, respectivamente, *primero*, *segundo*, *tercero* y *cuarto cuadrantes*. Por ejemplo, en la figura 12-2, el ángulo A se encuentra en el segundo cuadrante, mientras que en la figura 12-3 está en el tercero.

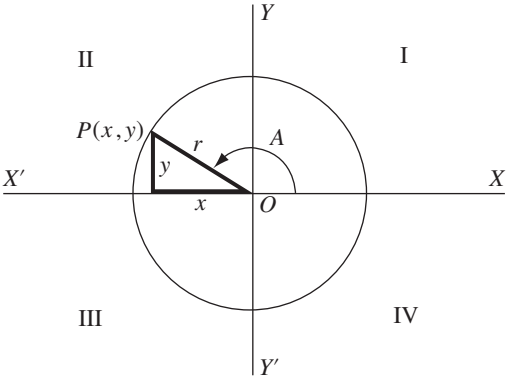


Fig. 12-2

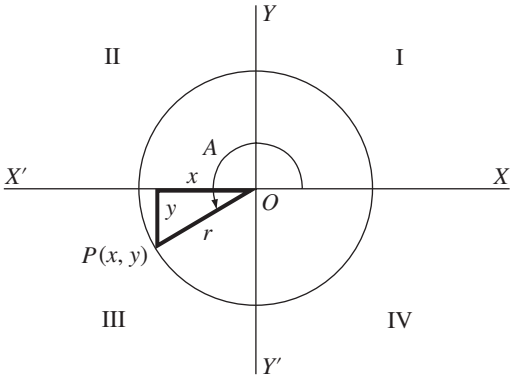


Fig. 12-3

Las funciones trigonométricas de un ángulo A en cualquier cuadrante se definen como sigue:

12.7. $\operatorname{sen} A = y/r$

12.8. $\cos A = x/r$

12.9. $\tan A = y/x$

12.10. $\cot A = x/y$

12.11. $\sec A = r/x$

12.12. $\csc A = r/y$

Relación entre grados y radianes

Un *radián* es aquel ángulo θ subtendido en el centro O de un círculo por un arco MN igual al radio r.

Como 2π radianes $= 360°$ tenemos que:

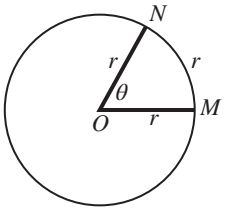


Fig. 12-4

12.13. 1 radián $= 180°/\pi = 57.29577\ \ 95130\ \ 8232\ \ldots°$

12.14. $1° = \pi/180$ radianes $= 0.01745\ \ 32925\ \ 19943\ \ 29576\ \ 92\ \ldots$ radianes

Relaciones entre las funciones trigonométricas

12.15. $\tan A = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A}$

12.16. $\cot A = \dfrac{1}{\tan A} = \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A}$

12.17. $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$

12.18. $\csc A = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}$

12.19. $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1$

12.20. $\sec^2 A - \tan^2 A = 1$

12.21. $\csc^2 A - \cot^2 A = 1$

Signos y variaciones de las funciones trigonométricas

Cuadrante	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
I	+ 0 a 1	+ 1 a 0	+ 0 a ∞	+ ∞ a 0	+ 1 a ∞	+ ∞ a 1
II	+ 1 a 0	– 0 a –1	– –∞ a 0	– 0 a –∞	– –∞ a –1	+ 1 a ∞
III	– 0 a –1	– –1 a 0	+ 0 a ∞	+ ∞ a 0	– –1 a –∞	– –∞ a –1
IV	– –1 a 0	+ 0 a 1	– –∞ a 0	– 0 a –∞	+ ∞ a 1	– –1 a –∞

Valores exactos de las funciones trigonométricas de varios ángulos

Ángulo A en grados	Ángulo A en radianes	sen A	cos A	tan A	cot A	sec A	csc A
0°	0	0	1	0	∞	1	∞
15°	$\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
30°	$\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
45°	$\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
75°	$5\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
90°	$\pi/2$	1	0	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	1
105°	$7\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$
120°	$2\pi/3$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	–2	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$
135°	$3\pi/4$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1	–1	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
150°	$5\pi/6$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	2
165°	$11\pi/12$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$
180°	π	0	–1	0	$\mp\infty$	–1	$\pm\infty$
195°	$13\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$2-\sqrt{3}$	$2+\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
210°	$7\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$	–2
225°	$5\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	1	1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
240°	$4\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	–2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
255°	$17\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$2+\sqrt{3}$	$2-\sqrt{3}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
270°	$3\pi/2$	–1	0	$\pm\infty$	0	$\mp\infty$	–1
285°	$19\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$-(2+\sqrt{3})$	$-(2-\sqrt{3})$	$\sqrt{6}+\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}-\sqrt{2})$
300°	$5\pi/3$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	2	$-\frac{2}{3}\sqrt{3}$
315°	$7\pi/4$	$-\frac{1}{2}\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{2}$	–1	–1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
330°	$11\pi/6$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{3}$	–2
345°	$23\pi/12$	$-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$	$\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$	$-(2-\sqrt{3})$	$-(2+\sqrt{3})$	$\sqrt{6}-\sqrt{2}$	$-(\sqrt{6}+\sqrt{2})$
360°	2π	0	1	0	$\pm\infty$	1	$\mp\infty$

Los valores de otros ángulos pueden encontrarse en las tablas 2, 3 y 4.

Representaciones gráficas de las funciones trigonométricas

En cada gráfica, x está en radianes.

12.22. $y = \operatorname{sen} x$

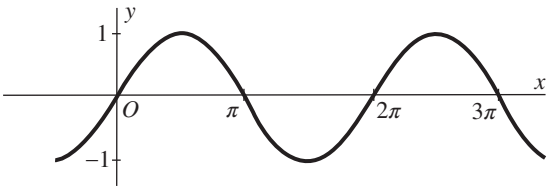


Fig. 12-5

12.23. $y = \cos x$

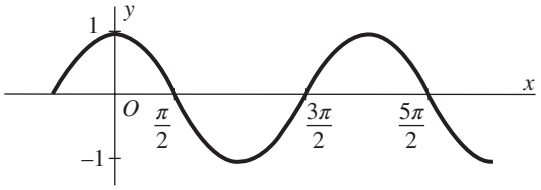


Fig. 12-6

12.24. $y = \tan x$

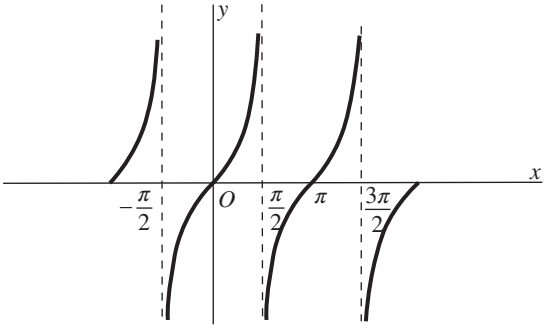


Fig. 12-7

12.25. $y = \cot x$

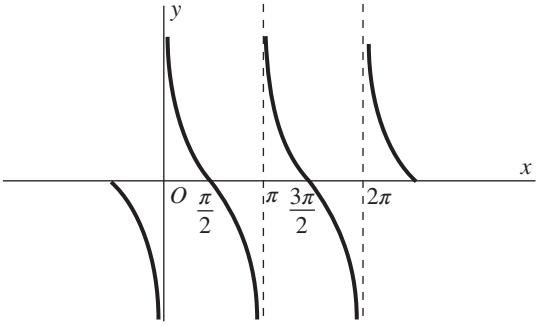


Fig. 12-8

12.26. $y = \sec x$

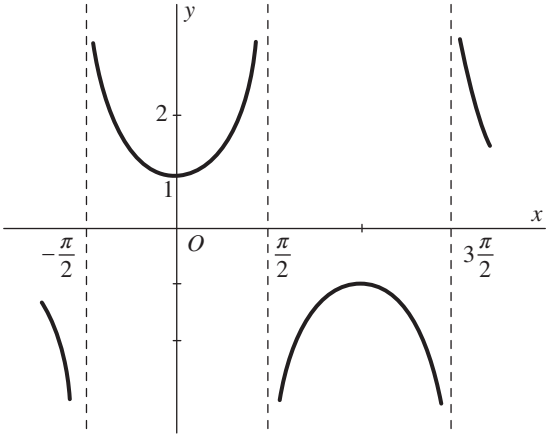


Fig. 12-9

12.27. $y = \csc x$

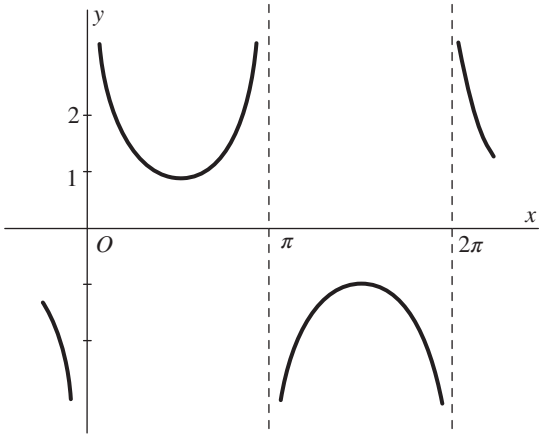


Fig. 12-10

Funciones de ángulos negativos

12.28. $\operatorname{sen}(-A) = -\operatorname{sen} A$

12.29. $\cos(-A) = \cos A$

12.30. $\tan(-A) = -\tan A$

12.31. $\csc(-A) = -\csc A$

12.32. $\sec(-A) = \sec A$

12.33. $\cot(-A) = -\cot A$

Fórmulas de adición

12.34. $\operatorname{sen}(A \pm B) = \operatorname{sen} A \cos B \pm \cos A \operatorname{sen} B$

12.35. $\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$

12.36. $\tan(A \pm B) = \dfrac{\tan A \pm \tan B}{1 \mp \tan A \tan B}$

12.37. $\cot(A \pm B) = \dfrac{\cot A \cot B \mp 1}{\cot B \pm \cot A}$

Funciones de ángulos en cualquier cuadrante en términos de ángulos en el primer cuadrante

	$-A$	$90° \pm A$ $\dfrac{\pi}{2} \pm A$	$180° \pm A$ $\pi \pm A$	$270° \pm A$ $\dfrac{3\pi}{2} \pm A$	$k(360°) \pm A$ $2k\pi \pm A$ k = entero
sen	$-\operatorname{sen} A$	$\cos A$	$\operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\pm \operatorname{sen} A$
cos	$\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$-\cos A$	$\mp \operatorname{sen} A$	$\cos A$
tan	$-\tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$	$\mp \cot A$	$\pm \tan A$
csc	$-\csc A$	$\sec A$	$\mp \csc A$	$-\sec A$	$\pm \csc A$
sec	$\sec A$	$\mp \csc A$	$-\sec A$	$\pm \csc A$	$\sec A$
cot	$-\cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$	$\mp \tan A$	$\pm \cot A$

Relaciones entre las funciones de los ángulos en el primer cuadrante

	$\operatorname{sen} A = u$	$\cos A = u$	$\tan A = u$	$\cot A = u$	$\sec A = u$	$\csc A = u$
$\operatorname{sen} A$	u	$\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	$1/u$
$\cos A$	$\sqrt{1-u^2}$	u	$1/\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}/u$
$\tan A$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$1/\sqrt{u^2-1}$
$\cot A$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{u^2-1}$
$\sec A$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	u	$u/\sqrt{u^2-1}$
$\csc A$	$1/u$	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}/u$	$\sqrt{1+u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	u

Para los otros cuadrantes, utilice los signos apropiados de acuerdo con la tabla anterior.

Fórmulas de ángulo doble

12.38. $\operatorname{sen} 2A = 2 \operatorname{sen} A \cos A$

12.39. $\cos 2A = \cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2\operatorname{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1$

12.40. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$

Fórmulas de ángulo medio

12.41. $\operatorname{sen}\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{2}}$ $\begin{bmatrix} + \text{ si } A/2 \text{ está en el cuadrante I o II} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el cuadrante III o IV} \end{bmatrix}$

12.42. $\cos\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1+\cos A}{2}}$ $\begin{bmatrix} + \text{ si } A/2 \text{ está en el cuadrante I o IV} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el cuadrante II o III} \end{bmatrix}$

12.43. $\tan\dfrac{A}{2} = \pm\sqrt{\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A}}$ $\begin{bmatrix} + \text{ si } A/2 \text{ está en el cuadrante I o III} \\ - \text{ si } A/2 \text{ está en el cuadrante II o IV} \end{bmatrix}$

$$= \frac{\operatorname{sen} A}{1+\cos A} = \frac{1-\cos A}{\operatorname{sen} A} = \csc A - \cot A$$

Fórmulas de ángulo múltiple

12.44. $\operatorname{sen} 3A = 3\operatorname{sen} A - 4\operatorname{sen}^3 A$

12.45. $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$

12.46. $\tan 3A = \dfrac{3\tan A - \tan^3 A}{1 - 3\tan^2 A}$

12.47. $\operatorname{sen} 4A = 4\operatorname{sen} A \cos A - 8\operatorname{sen}^3 A \cos A$

12.48. $\cos 4A = 8\cos^4 A - 8\cos^2 A + 1$

12.49. $\tan 4A = \dfrac{4\tan A - 4\tan^3 A}{1 - 6\tan^2 A + \tan^4 A}$

12.50. $\operatorname{sen} 5A = 5\operatorname{sen} A - 20\operatorname{sen}^3 A + 16\operatorname{sen}^5 A$

12.51. $\cos 5A = 16\cos^5 A - 20\cos^3 A + 5\cos A$

12.52. $\tan 5A = \dfrac{\tan^5 A - 10\tan^3 A + 5\tan A}{1 - 10\tan^2 A + 5\tan^4 A}$

(Vea también las fórmulas 12.68 y 12.69.)

Potencias de funciones trigonométricas

12.53. $\operatorname{sen}^2 A = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2A$

12.54. $\cos^2 A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2A$

12.55. $\operatorname{sen}^3 A = \frac{3}{4}\operatorname{sen} A - \frac{1}{4}\operatorname{sen} 3A$

12.56. $\cos^3 A = \frac{3}{4}\cos A + \frac{1}{4}\cos 3A$

12.57. $\operatorname{sen}^4 A = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{8}\cos 4A$

12.58. $\cos^4 A = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2A + \frac{1}{8}\cos 4A$

12.59. $\operatorname{sen}^5 A = \frac{5}{8}\operatorname{sen} A - \frac{5}{16}\operatorname{sen} 3A + \frac{1}{16}\operatorname{sen} 5A$

12.60. $\cos^5 A = \frac{5}{8}\cos A + \frac{5}{16}\cos 3A + \frac{1}{16}\cos 5A$

(Vea también fórmulas de la 12.70 a la 12.73.)

Suma, diferencia y producto de funciones trigonométricas

12.61. $\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

12.62. $\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A-B)$

12.63. $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$

12.64. $\cos A - \cos B = 2\operatorname{sen}\frac{1}{2}(A+B)\operatorname{sen}\frac{1}{2}(B-A)$

12.65. $\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) - \cos(A+B)\}$

12.66. $\cos A \cos B = \frac{1}{2}\{\cos(A-B) + \cos(A+B)\}$

12.67. $\operatorname{sen} A \cos B = \frac{1}{2}\{\operatorname{sen}(A-B) + \operatorname{sen}(A+B)\}$

Fórmulas generales

12.68. $$\operatorname{sen} nA = \operatorname{sen} A\left\{(2\cos A)^{n-1} - \binom{n-2}{1}(2\cos A)^{n-3} + \binom{n-3}{2}(2\cos A)^{n-5} - \cdots\right\}$$

12.69. $$\cos nA = \frac{1}{2}\left\{(2\cos A)^n - \frac{n}{1}(2\cos A)^{n-2} + \frac{n}{2}\binom{n-3}{1}(2\cos A)^{n-4} - \frac{n}{3}\binom{n-4}{2}(2\cos A)^{n-6} + \cdots\right\}$$

12.70. $$\operatorname{sen}^{2n-1} A = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{2n-2}}\left\{\operatorname{sen}(2n-1)A - \binom{2n-1}{1}\operatorname{sen}(2n-3)A + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}\operatorname{sen} A\right\}$$

12.71. $$\cos^{2n-1} A = \frac{1}{2^{2n-2}}\left\{\cos(2n-1)A + \binom{2n-1}{1}\cos(2n-3)A + \cdots + \binom{2n-1}{n-1}\cos A\right\}$$

12.72. $$\operatorname{sen}^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{(-1)^n}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA - \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \cdots (-1)^{n-1}\binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\}$$

12.73. $$\cos^{2n} A = \frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n} + \frac{1}{2^{2n-1}}\left\{\cos 2nA + \binom{2n}{1}\cos(2n-2)A + \cdots + \binom{2n}{n-1}\cos 2A\right\}$$

Funciones trigonométricas inversas

Si $x = \operatorname{sen} y$, entonces $y = \operatorname{sen}^{-1} x$, es decir, *el ángulo cuyo seno es x* o *seno inverso de x* es una función multivaluada de x que puede considerarse como un conjunto de funciones llamadas *ramas*. Similarmente, las demás funciones trigonométricas inversas son multivaluadas.

En la práctica, es necesario seleccionar una rama en particular. A esta se le llama la *rama principal* y, los valores de esta rama se les llama *valores principales*.

Valores principales de las funciones trigonométricas inversas

Valores principales para $x \geqq 0$	Valores principales para $x < 0$
$0 \leqq \operatorname{sen}^{-1} x \leqq \pi/2$	$-\pi/2 \leqq \operatorname{sen}^{-1} x < 0$
$0 \leqq \cos^{-1} x \leqq \pi/2$	$\pi/2 < \cos^{-1} x \leqq \pi$
$0 \leqq \tan^{-1} x < \pi/2$	$-\pi/2 < \tan^{-1} x < 0$
$0 < \cot^{-1} x \leqq \pi/2$	$\pi/2 < \cot^{-1} x < \pi$
$0 \leqq \sec^{-1} x < \pi/2$	$\pi/2 < \sec^{-1} x \leqq \pi$
$0 < \csc^{-1} x \leqq \pi/2$	$-\pi/2 \leqq \csc^{-1} x < 0$

Relaciones entre las funciones trigonométricas inversas

En todos los casos, se supone que se usan valores principales.

12.74. $\operatorname{sen}^{-1} x + \cos^{-1} x = \pi/2$

12.75. $\tan^{-1} x + \cot^{-1} x = \pi/2$

12.76. $\sec^{-1} x + \csc^{-1} x = \pi/2$

12.77. $\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}(1/x)$

12.78. $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$

12.79. $\cot^{-1} x = \tan^{-1}(1/x)$

12.80. $\operatorname{sen}^{-1}(-x) = -\operatorname{sen}^{-1} x$

12.81. $\cos^{-1}(-x) = \pi - \cos^{-1} x$

12.82. $\tan^{-1}(-x) = -\tan^{-1} x$

12.83. $\cot^{-1}(-x) = \pi - \cot^{-1} x$

12.84. $\sec^{-1}(-x) = \pi - \sec^{-1} x$

12.85. $\csc^{-1}(-x) = -\csc^{-1} x$

Representaciones gráficas de las funciones trigonométricas inversas

En todas las gráficas y está en radianes. Las partes no punteadas corresponden a los valores principales.

12.86. $y = \operatorname{sen}^{-1} x$

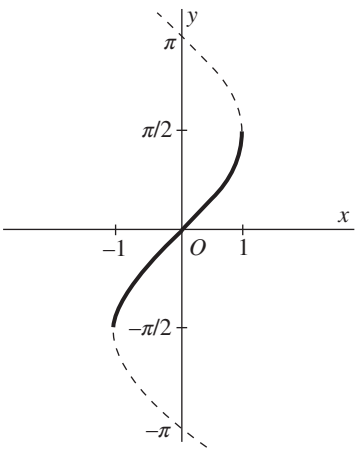


Fig. 12-11

12.87. $y = \cos^{-1} x$

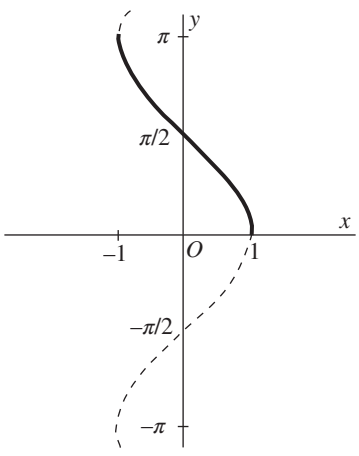


Fig. 12-12

12.88. $y = \tan^{-1} x$

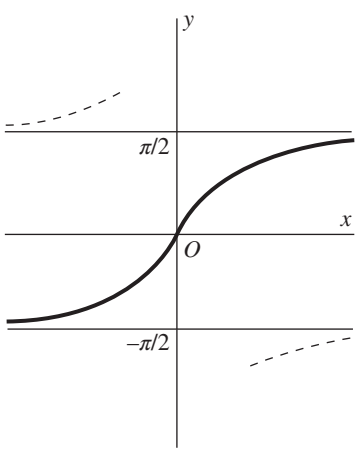


Fig. 12-13

12.89. $y = \cot^{-1} x$

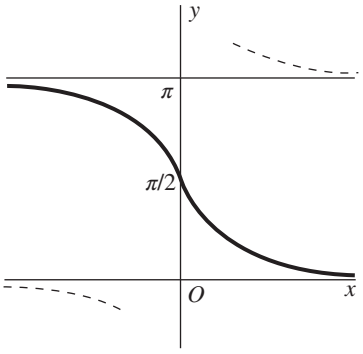


Fig. 12-14

12.90. $y = \sec^{-1} x$

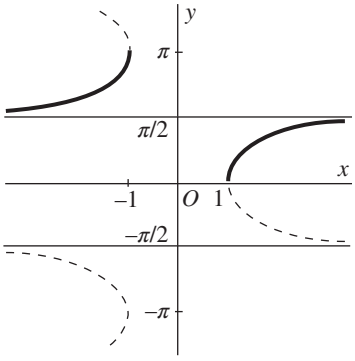


Fig. 12-15

12.91. $y = \csc^{-1} x$

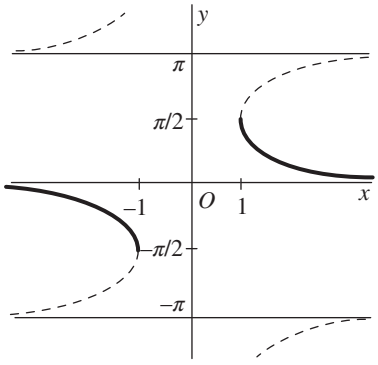


Fig. 12-16

Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo plano

Los siguientes resultados son válidos para cualquier triángulo plano ABC con lados a, b, c y ángulos A, B, C.

12.92. Ley de los senos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

12.93. Ley de los cosenos:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$

con relaciones semejantes que involucran los demás lados y ángulos.

12.94. Ley de las tangentes:

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}$$

con relaciones semejantes que involucran los otros lados y ángulos.

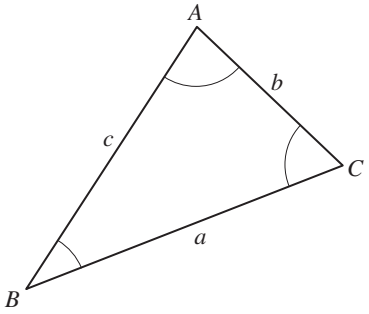


Fig. 12-17

12.95. $\operatorname{sen} A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

donde $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$ es el semiperímetro del triángulo. Pueden obtenerse relaciones similares para los ángulos B y C.

(Vea también la fórmula 7.5.)

Relaciones entre los lados y ángulos de un triángulo esférico

En la figura 12.18 se muestra el triángulo esférico ABC sobre la superficie de una esfera. La medida de sus lados a, b, c (que son arcos de círculos grandes) está dada por los ángulos que subtienden al centro O de la esfera. A, B, C son los ángulos opuestos a los lados a, b, c, respectivamente. Por tanto, son válidos los siguientes resultados:

12.96. Ley de los senos:

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

12.97. Ley de los cosenos:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$
$$\cos A = -\cos B \cos C + \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos a$$

con resultados similares que involucran otros lados y ángulos.

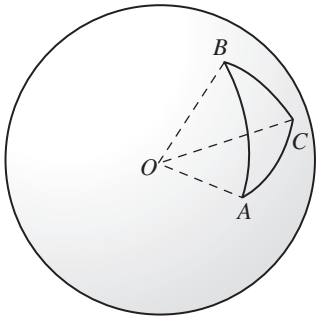


Fig. 12-18

12.98. Ley de las tangentes:

$$\frac{\tan\frac{1}{2}(A+B)}{\tan\frac{1}{2}(A-B)}=\frac{\tan\frac{1}{2}(a+b)}{\tan\frac{1}{2}(a-b)}$$

con resultados similares que involucran otros lados y ángulos.

12.99. $\cos\dfrac{A}{2}=\sqrt{\dfrac{\operatorname{sen} s\ \operatorname{sen}(s-c)}{\operatorname{sen} b\ \operatorname{sen} c}}$

donde $s=\frac{1}{2}(a+b+c)$. Resultados similares son válidos para otros lados y ángulos.

12.100. $\cos\dfrac{a}{2}=\sqrt{\dfrac{\cos(S-B)\cos(S-C)}{\operatorname{sen} B\ \operatorname{sen} C}}$

donde $S=\frac{1}{2}(A+B+C)$. Resultados similares son válidos para otros lados y ángulos.

(Vea también la fórmula 7.44.)

Reglas de Napier para triángulos esféricos con ángulos rectos

A excepción del ángulo recto C, hay cinco partes del triángulo esférico ABC que podrían ser a, b, A, c, B, si se arregla en el orden que se da en la figura 12-19.

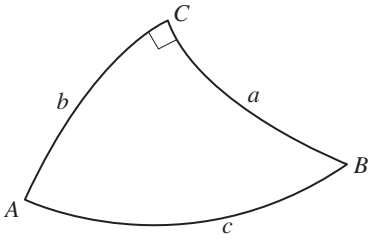


Fig. 12-19

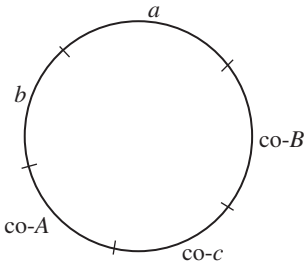


Fig. 12-20

Supongamos que estas cantidades se ordenan en un círculo como se indica en la figura 12-20 donde hemos añadido el prefijo "co" (para indicar *complemento*) a la hipotenusa c y a los ángulos A y B.

Cualquiera de las partes de este círculo se llama *parte media*, las dos partes vecinas se conocen como *partes adyacentes*, y las dos partes restantes se nombran *partes opuestas*. Las reglas de Napier son:

12.101. El seno de cualquier parte media es igual al producto de las tangentes de las partes adyacentes.

12.102. El seno de cualquier parte media es igual al producto de los cosenos de las partes opuestas.

EJEMPLO: Como co-$A = 90° - A$, co-$B = 90° - B$, tenemos que:

$$\operatorname{sen} a=\tan b\ (\text{co-}B) \quad \text{o} \quad \operatorname{sen} a=\tan b\cot B$$
$$\operatorname{sen}(\text{co-}A)=\cos a\cos(\text{co-}B) \quad \text{o} \quad \cos A=\cos a\operatorname{sen} B$$

Por supuesto, estos resultados pueden obtenerse de 12.97.

13 FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Leyes de los exponentes

En las siguientes fórmulas, p, q son números reales; a, b son números positivos; y m, n son enteros positivos.

13.1. $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$ **13.2.** $a^p / a^q = a^{p-q}$ **13.3.** $(a^p)^q = a^{pq}$

13.4. $a^0 = 1,\ a \neq 0$ **13.5.** $a^{-p} = 1/a^p$ **13.6.** $(ab)^p = a^p b^p$

13.7. $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ **13.8.** $\sqrt[n]{a^m} = a^{m/n}$ **13.9.** $\sqrt[n]{a/b} = \sqrt[n]{a}/\sqrt[n]{b}$

En a^p, p se llama *exponente*, a es la *base* y a^p se llama *p-ésima potencia* de a. La función $y = a^x$ se llama *función exponencial*.

Logaritmos y antilogaritmos

Si $a^p = N$ donde $a \neq 0$ o 1, entonces $p = \log_a N$ se llama el *logaritmo* de N en la base a. El número $N = a^p$ se llama *antilogaritmo* de p en la base a, escrito $\text{antilog}_a p$.

EJEMPLO: Como $3^2 = 9$ tenemos que $\log_3 9 = 2$, $\text{antilog}_3 2 = 9$.

La función $y = \log_a x$ se llama *función logarítmica*.

Leyes de los logaritmos

13.10. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$

13.11. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$

13.12. $\log_a M^p = p \log_a M$

Logaritmos y antilogaritmos comunes

Los logaritmos y antilogaritmos comunes (también llamados *logaritmos de Briggsian* o *briggsianos*) son aquellos en los cuales la base $a = 10$. El logaritmo común de N se escribe $\log_{10} N$ o simplemente $\log N$. Algunos valores numéricos de logaritmos comunes pueden encontrarse en la tabla 1.

Logaritmos y antilogaritmos naturales

Los logaritmos y antilogaritmos naturales (también llamados *logaritmos de Napier* o *Neperianos*) son aquellos en los cuales la base $a = e = 2.71828\ \ 18\ \ldots$ (vea la página 3). El logaritmo natural de N se escribe $\log_e N$ o simplemente $\ln N$. Algunos valores numéricos de logaritmos naturales pueden encontrarse en la tabla 7. Para valores de antilogaritmos naturales (es decir, una tabla que contiene e^x para valores de x), vea la tabla 8.

Cambio de base de un logaritmo

La relación entre logaritmos de un número N a distintas bases a y b está dada por:

13.13. $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$

En particular,

13.14. $\log_e N = \ln N = 2.30258\ \ 50929\ \ 94 \ldots \log_{10} N$

13.15. $\log_{10} N = \log N = 0.43429\ \ 44819\ \ 03 \ldots \log_e N$

Relaciones entre funciones exponenciales y funciones trigonométricas

13.16. $e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta, \qquad e^{-i\theta} = \cos\theta - i \operatorname{sen}\theta$

Las anteriores se llaman *identidades de Euler*. Aquí i es la unidad imaginaria (vea la página 10).

13.17. $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

13.18. $\cos\theta = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$

13.19. $\tan\theta = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{i(e^{i\theta} + e^{-i\theta})} = -i\left(\dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}\right)$

13.20. $\cot\theta = i\left(\dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}\right)$

13.21. $\sec\theta = \dfrac{2}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}$

13.22. $\csc\theta = \dfrac{2i}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}$

Periodicidad de las funciones exponenciales

13.23. $e^{i(\theta + 2k\pi)} = e^{i\theta} \qquad k = \text{entero}$

De lo anterior observamos que e^x tiene periodo $2\pi i$.

Forma polar de los números complejos expresados como un exponencial

La forma polar (vea la fórmula 4.7) de un número complejo $z = x + iy$ puede escribirse en términos de exponenciales como sigue:

13.24. $z = x + iy = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$

Operaciones con números complejos en forma polar

Las fórmulas de la 4.8 a la 4.11 son equivalentes a las siguientes:

13.25. $(r_1 e^{i\theta_1})(r_2 e^{i\theta_2}) = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$

13.26. $\dfrac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1-\theta_2)}$

13.27. $(re^{i\theta})^p = r^p e^{ip\theta}$ (Teorema de De Moivre)

13.28. $(re^{i\theta})^{1/n} = [re^{i(\theta+2k\pi)}]^{1/n} = r^{1/n} e^{i(\theta+2k\pi)/n}$

Logaritmo de un número complejo

13.29. $\ln(re^{i\theta}) = \ln r + i\theta + 2k\pi i \quad k = \text{entero}$

14 FUNCIONES HIPERBÓLICAS

Definición de las funciones hiperbólicas

14.1. *Seno hiperbólico* de x $= \operatorname{senh} x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

14.2. *Coseno hiperbólico* de x $= \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$

14.3. *Tangente hiperbólica* de x $= \tanh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

14.4. *Cotangente hiperbólica* de x $= \coth x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

14.5. *Secante hiperbólica* de x $= \operatorname{sech} x = \dfrac{2}{e^x + e^{-x}}$

14.6. *Cosecante hiperbólica* de x $= \operatorname{csch} x = \dfrac{2}{e^x - e^{-x}}$

Relaciones entre las funciones hiperbólicas

14.7. $\tanh x = \dfrac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$

14.8. $\coth x = \dfrac{1}{\tanh x} = \dfrac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}$

14.9. $\operatorname{sech} x = \dfrac{1}{\cosh x}$

14.10. $\operatorname{csch} x = \dfrac{1}{\operatorname{senh} x}$

14.11. $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$

14.12. $\operatorname{sech}^2 x + \tanh^2 x = 1$

14.13. $\coth^2 x - \operatorname{csch}^2 x = 1$

Funciones de argumentos negativos

14.14. $\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x$ **14.15.** $\cosh(-x) = \cosh x$ **14.16.** $\tanh(-x) = -\tanh x$

14.17. $\operatorname{csch}(-x) = -\operatorname{csch} x$ **14.18.** $\operatorname{sech}(-x) = \operatorname{sech} x$ **14.19.** $\coth(-x) = -\coth x$

Fórmulas de adición

14.20. $\operatorname{senh}(x \pm y) = \operatorname{senh} x \cosh y \pm \cosh x \operatorname{senh} y$

14.21. $\cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$

14.22. $\tanh(x \pm y) = \dfrac{\tanh x \pm \tanh y}{1 \pm \tanh x \tanh y}$

14.23. $\coth(x \pm y) = \dfrac{\coth x \coth y \pm 1}{\coth y \pm \coth x}$

Fórmulas de ángulo doble

14.24. $\operatorname{senh} 2x = 2 \operatorname{senh} x \cosh x$

14.25. $\cosh 2x = \cos \mathrm{h}^2 x + \operatorname{sen} \mathrm{h}^2 x = 2 \cos \mathrm{h}^2 x - 1 = 1 + 2 \operatorname{sen} \mathrm{h}^2 x$

14.26. $\tanh 2x = \dfrac{2 \tanh x}{1 + \tanh^2 x}$

Fórmulas de ángulo medio

14.27. $\operatorname{senh} \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{2}}$ [+ si $x > 0$, − si $x < 0$]

14.28. $\cosh \dfrac{x}{2} = \sqrt{\dfrac{\cosh x + 1}{2}}$

14.29. $\tanh \dfrac{x}{2} = \pm \sqrt{\dfrac{\cosh x - 1}{\cosh x + 1}}$ [+ si $x > 0$, − si $x < 0$]

$$= \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x + 1} = \frac{\cosh x - 1}{\operatorname{senh} x}$$

Fórmulas de ángulo múltiple

14.30. $\operatorname{senh} 3x = 3 \operatorname{senh} x + 4 \operatorname{senh}^3 x$

14.31. $\cosh 3x = 4 \cosh^3 x - 3 \cosh x$

14.32. $\tanh 3x = \dfrac{3 \tanh x + \tanh^3 x}{1 + 3 \tanh^2 x}$

14.33. $\operatorname{senh} 4x = 8 \operatorname{senh}^3 x \cosh x + 4 \operatorname{senh} x \cosh x$

14.34. $\cosh 4x = 8 \cosh^4 x - 8 \cosh^2 x + 1$

14.35. $\tanh 4x = \dfrac{4 \tanh x + 4 \tanh^3 x}{1 + 6 \tanh^2 x + \tanh^4 x}$

Potencias de funciones hiperbólicas

14.36. $\operatorname{senh}^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x - \frac{1}{2}$

14.37. $\cosh^2 x = \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{2}$

14.38. $\operatorname{senh}^3 x = \frac{1}{4}\operatorname{senh} 3x - \frac{3}{4}\operatorname{senh} x$

14.39. $\cosh^3 x = \frac{1}{4}\cosh 3x + \frac{3}{4}\cosh x$

14.40. $\operatorname{senh}^4 x = \frac{3}{8} - \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x$

14.41. $\cosh^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cosh 2x + \frac{1}{8}\cosh 4x$

Suma, resta y producto de funciones hiperbólicas

14.42. $\operatorname{senh} x + \operatorname{senh} y = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$

14.43. $\operatorname{senh} x - \operatorname{senh} y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x-y)$

14.44. $\cosh x + \cosh y = 2\cosh\frac{1}{2}(x+y)\cosh\frac{1}{2}(x-y)$

14.45. $\cosh x - \cosh y = 2\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x+y)\operatorname{senh}\frac{1}{2}(x-y)$

14.46. $\operatorname{senh} x \operatorname{senh} y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) - \cosh(x-y)\}$

14.47. $\cosh x \cosh y = \frac{1}{2}\{\cosh(x+y) + \cosh(x-y)\}$

14.48. $\operatorname{senh} x \cosh y = \frac{1}{2}\{\operatorname{senh}(x+y) + \operatorname{senh}(x-y)\}$

Expresión de funciones hiperbólicas en términos de otras

A continuación se asume que $x > 0$. Si $x < 0$, utilice el signo apropiado de acuerdo con las fórmulas 14.14 a 14.19.

	$\operatorname{senh} x = u$	$\cosh x = u$	$\tanh x = u$	$\coth x = u$	$\operatorname{sech} x = u$	$\operatorname{csch} x = u$
$\operatorname{senh} x$	u	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$1/u$
$\cosh x$	$\sqrt{1+u^2}$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	$\sqrt{1+u^2}/u$
$\tanh x$	$u/\sqrt{1+u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$1/\sqrt{1+u^2}$
$\coth x$	$\sqrt{u^2+1}/u$	$u/\sqrt{u^2-1}$	$1/u$	u	$1/\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{sech} x$	$1/\sqrt{1+u^2}$	$1/u$	$\sqrt{1-u^2}$	$\sqrt{u^2-1}/u$	u	$u/\sqrt{1+u^2}$
$\operatorname{csch} x$	$1/u$	$1/\sqrt{u^2-1}$	$\sqrt{1-u^2}/u$	$\sqrt{u^2-1}$	$u/\sqrt{1-u^2}$	u

Representaciones gráficas de las funciones hiperbólicas

14.49. $y = \operatorname{senh} x$

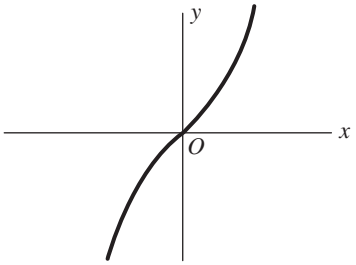


Fig. 14-1

14.50. $y = \cosh x$

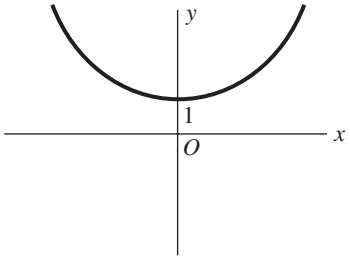


Fig. 14-2

14.51. $y = \tanh x$

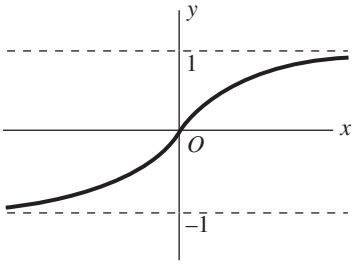


Fig. 14-3

14.52. $y = \coth x$

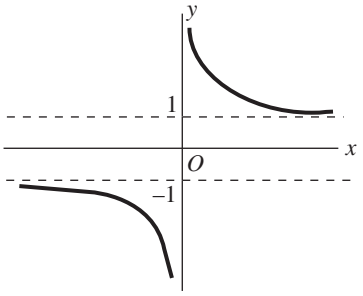


Fig. 14-4

14.53. $y = \operatorname{sech} x$

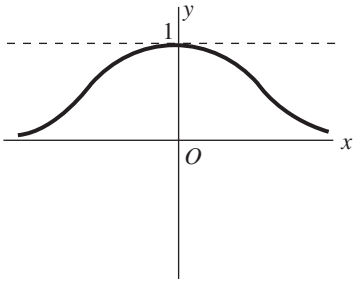


Fig. 14-5

14.54. $y = \operatorname{csch} x$

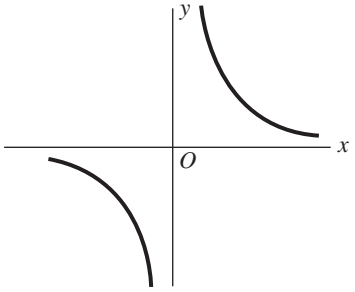


Fig. 14-6

Funciones hiperbólicas inversas

Si $x = \operatorname{senh} y$, entonces $y = \operatorname{senh}^{-1} x$ se llama *seno hiperbólico inverso* de x. Similarmente definimos las demás funciones hiperbólicas inversas. Las funciones hiperbólicas inversas son funciones multivaluadas y, al igual que en el caso de las funciones trigonométricas inversas [vea la página 49], nos restringimos a los valores principales, para las cuales pueden considerarse como de valor simple.

La siguiente lista muestra los valores principales (a no ser que se indique lo contrario) de las funciones hiperbólicas inversas expresadas en términos de funciones logarítmicas, las cuales se toman como valuadas reales.

14.55. $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $\quad -\infty < x < \infty$

14.56. $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$ $\quad x \geqq 1$ $\quad (\cosh^{-1} x > 0$ es valor principal)

14.57. $\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ $\quad -1 < x < 1$

14.58. $\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$ $\quad x > 1$ o $x < -1$

14.59. $\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} - 1}\right)$ $\quad 0 < x \leqq 1$ $\quad (\operatorname{sech}^{-1} x > 0$ es valor principal)

14.60. $\operatorname{csch}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2} + 1}\right)$ $\quad x \neq 0$

Relación entre las funciones hiperbólicas inversas

14.61. $\operatorname{csch}^{-1} x = \operatorname{senh}^{-1}(1/x)$

14.62. $\operatorname{sech}^{-1} x = \cosh^{-1}(1/x)$

14.63. $\coth^{-1} x = \tanh^{-1}(1/x)$

14.64. $\operatorname{senh}^{-1}(-x) = -\operatorname{senh}^{-1} x$

14.65. $\tanh^{-1}(-x) = -\tanh^{-1} x$

14.66. $\coth^{-1}(-x) = -\coth^{-1} x$

14.67. $\operatorname{csch}^{-1}(-x) = -\operatorname{csch}^{-1} x$

Representaciones gráficas de las funciones hiperbólicas inversas

14.68. $y = \operatorname{senh}^{-1} x$

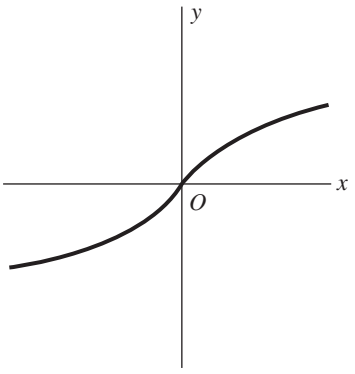


Fig. 14-7

14.69. $y = \cosh^{-1} x$

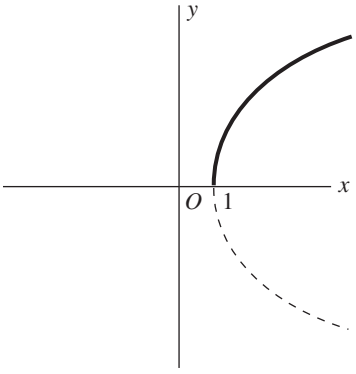


Fig. 14-8

14.70. $y = \tanh^{-1} x$

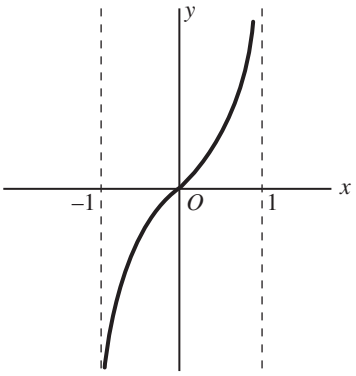


Fig. 14-9

14.71. $y = \coth^{-1} x$

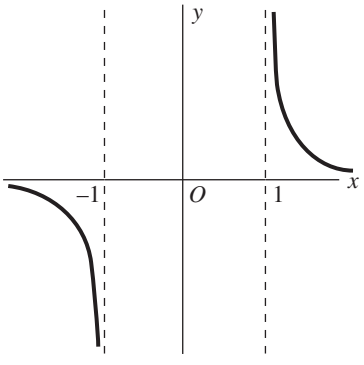


Fig. 14-10

14.72. $y = \operatorname{sech}^{-1} x$

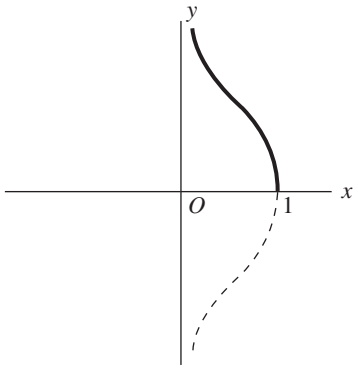


Fig. 14-11

14.73. $y = \operatorname{csch}^{-1} x$

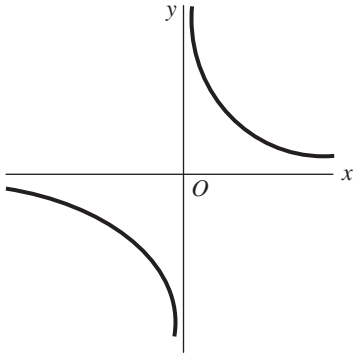


Fig. 14-12

Relación entre las funciones hiperbólicas y trigonométricas

14.74. $\operatorname{sen}(ix) = i \operatorname{senh} x$

14.75. $\cos(ix) = \cosh x$

14.76. $\tan(ix) = i \tanh x$

14.77. $\csc(ix) = -i \operatorname{csch} x$

14.78. $\sec(ix) = \operatorname{sech} x$

14.79. $\cot(ix) = -i \coth x$

14.80. $\operatorname{senh}(ix) = i \operatorname{sen} x$

14.81. $\cosh(ix) = \cos x$

14.82. $\tanh(ix) = i \tan x$

14.83. $\operatorname{csch}(ix) = -i \csc x$

14.84. $\operatorname{sech}(ix) = \sec x$

14.85. $\coth(ix) = -i \cot x$

Periodicidad de las funciones hiperbólicas

En las siguientes fórmulas k es cualquier entero.

14.86. $\operatorname{senh}(x + 2k\pi i) = \operatorname{senh} x$

14.87. $\cosh(x + 2k\pi i) = \cosh x$

14.88. $\tanh(x + k\pi i) = \tanh x$

14.89. $\operatorname{csch}(x + 2k\pi i) = \operatorname{csch} x$

14.90. $\operatorname{sech}(x + 2k\pi i) = \operatorname{sech} x$

14.91. $\coth(x + k\pi i) = \coth x$

Relación entre las funciones hiperbólicas inversas y trigonométricas inversas

14.92. $\operatorname{sen}^{-1}(ix) = i \operatorname{sen}^{-1} x$

14.93. $\operatorname{senh}^{-1}(ix) = i \operatorname{sen}^{-1} x$

14.94. $\cos^{-1} x = \pm i \cosh^{-1} x$

14.95. $\cosh^{-1} x = \pm i \cos^{-1} x$

14.96. $\tan^{-1}(ix) = i \tanh^{-1} x$

14.97. $\tanh^{-1}(ix) = i \tan^{-1} x$

14.98. $\cot^{-1}(ix) = i \coth^{-1} x$

14.99. $\coth^{-1}(ix) = -i \cot^{-1} x$

14.100. $\sec^{-1} x = \pm i \operatorname{sech}^{-1} x$

14.101. $\operatorname{sech}^{-1} x = \pm i \sec^{-1} x$

14.102. $\csc^{-1}(ix) = -i \operatorname{csch}^{-1} x$

14.103. $\operatorname{csch}^{-1}(ix) = -i \csc^{-1} x$

15 DERIVADAS

Definición de derivada

Suponga que $y = f(x)$. La derivada de y o $f(x)$ se define como sigue:

15.1. $$\frac{dy}{dx} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

donde $h = \Delta x$. La derivada se denota también por y', df/dx o $f'(x)$. El proceso de hallar una derivada se conoce como *diferenciación*.

Reglas generales de diferenciación

En las siguientes expresiones, u, v y w son funciones de x; a, b, c y n son constantes (con restricciones si así se indica); $e = 2.71828\ldots$ es la base natural de los logaritmos; ln u es el logaritmo natural de u (es decir, el logaritmo base e) donde se asume que $u > 0$ y que todos los ángulos se dan en radianes.

15.2. $$\frac{d}{dx}(c) = 0$$

15.3. $$\frac{d}{dx}(cx) = c$$

15.4. $$\frac{d}{dx}(cx^n) = ncx^{n-1}$$

15.5. $$\frac{d}{dx}(u \pm v \pm w \pm \cdots) = \frac{du}{dx} \pm \frac{dv}{dx} \pm \frac{dw}{dx} \pm \cdots$$

15.6. $$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$

15.7. $$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

15.8. $$\frac{d}{dx}(uvw) = uv\frac{dw}{dx} + uw\frac{dv}{dx} + vw\frac{du}{dx}$$

15.9. $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$$

15.10. $$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

15.11. $$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}$$ (Regla de la cadena)

15.12. $\dfrac{du}{dx} = \dfrac{1}{dx/du}$

15.13. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy/du}{dx/du}$

Derivadas de funciones trigonométricas y trigonométricas inversas

15.14. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen} u = \cos u \dfrac{du}{dx}$

15.15. $\dfrac{d}{dx}\cos u = -\operatorname{sen} u \dfrac{du}{dx}$

15.16. $\dfrac{d}{dx}\tan u = \sec^2 u \dfrac{du}{dx}$

15.17. $\dfrac{d}{dx}\cot u = -\csc^2 u \dfrac{du}{dx}$

15.18. $\dfrac{d}{dx}\sec u = \sec u \tan u \dfrac{du}{dx}$

15.19. $\dfrac{d}{dx}\csc u = -\csc u \cot u \dfrac{du}{dx}$

15.20. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sen}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx} \quad \left[-\dfrac{\pi}{2} < \operatorname{sen}^{-1} u < \dfrac{\pi}{2}\right]$

15.21. $\dfrac{d}{dx}\cos^{-1} u = \dfrac{-1}{\sqrt{1-u^2}}\dfrac{du}{dx} \quad [0 < \cos^{-1} u < \pi]$

15.22. $\dfrac{d}{dx}\tan^{-1} u = \dfrac{1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx} \quad \left[-\dfrac{\pi}{2} < \tan^{-1} u < \dfrac{\pi}{2}\right]$

15.23. $\dfrac{d}{dx}\cot^{-1} u = \dfrac{-1}{1+u^2}\dfrac{du}{dx} \quad [0 < \cot^{-1} u < \pi]$

15.24. $\dfrac{d}{dx}\sec^{-1} u = \dfrac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} \quad \begin{bmatrix} + \text{ si } 0 < \sec^{-1} u < \pi/2 \\ - \text{ si } \pi/2 < \sec^{-1} u < \pi \end{bmatrix}$

15.25. $\dfrac{d}{dx}\csc^{-1} u = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\pm 1}{u\sqrt{u^2-1}}\dfrac{du}{dx} \quad \begin{bmatrix} - \text{ si } 0 < \csc^{-1} u < \pi/2 \\ + \text{ si } -\pi/2 < \csc^{-1} u < 0 \end{bmatrix}$

Derivadas de funciones exponenciales y logarítmicas

15.26. $\dfrac{d}{dx}\log_a u = \dfrac{\log_a e}{u}\dfrac{du}{dx} \quad a \neq 0, 1$

15.27. $\dfrac{d}{dx}\ln u = \dfrac{d}{dx}\log_e u = \dfrac{1}{u}\dfrac{du}{dx}$

15.28. $\dfrac{d}{dx}a^u = a^u \ln a \dfrac{du}{dx}$

15.29. $\dfrac{d}{dx}e^{u} = e^{u}\dfrac{du}{dx}$

15.30. $\dfrac{d}{dx}u^{v} = \dfrac{d}{dx}e^{v\ln u} = e^{v\ln u}\dfrac{d}{dx}[v\ln u] = v\,u^{v-1}\dfrac{du}{dx} + u^{v}\ln u\dfrac{dv}{dx}$

Derivadas de funciones hiperbólicas e hiperbólicas inversas

15.31. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh} u = \cosh u\dfrac{du}{dx}$

15.32. $\dfrac{d}{dx}\cosh u = \operatorname{senh} u\dfrac{du}{dx}$

15.33. $\dfrac{d}{dx}\tanh u = \operatorname{sech}^{2} u\dfrac{du}{dx}$

15.34. $\dfrac{d}{dx}\coth u = -\operatorname{csch}^{2} u\dfrac{du}{dx}$

15.35. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech} u = -\operatorname{sech} u\tanh u\dfrac{du}{dx}$

15.36. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch} u = -\operatorname{csch} u\coth u\dfrac{du}{dx}$

15.37. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{senh}^{-1} u = \dfrac{1}{\sqrt{u^{2}+1}}\dfrac{du}{dx}$

15.38. $\dfrac{d}{dx}\cosh^{-1} u = \dfrac{\pm 1}{\sqrt{u^{2}-1}}\dfrac{du}{dx}$ $\left[\begin{array}{l} +\text{ si } \cosh^{-1} u > 0,\ u > 1 \\ -\text{ si } \cosh^{-1} u < 0,\ u > 1 \end{array}\right]$

15.39. $\dfrac{d}{dx}\tanh^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^{2}}\dfrac{du}{dx}$ $[-1 < u < 1]$

15.40. $\dfrac{d}{dx}\coth^{-1} u = \dfrac{1}{1-u^{2}}\dfrac{du}{dx}$ $[u > 1 \text{ o } u < -1]$

15.41. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{sech}^{-1} u = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{1-u^{2}}}\dfrac{du}{dx}$ $\left[\begin{array}{l} -\text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u > 0,\ 0 < u < 1 \\ +\text{ si } \operatorname{sech}^{-1} u < 0,\ 0 < u < 1 \end{array}\right]$

15.42. $\dfrac{d}{dx}\operatorname{csch}^{-1} u = \dfrac{-1}{|u|\sqrt{1+u^{2}}}\dfrac{du}{dx} = \dfrac{\mp 1}{u\sqrt{1+u^{2}}}\dfrac{du}{dx}$ $[-\text{ si } u > 0, +\text{ si } u < 0]$

Derivadas de orden superior

La segunda y tercera derivadas, y las derivadas de orden superior se definen como sigue:

15.43. Segunda derivada $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right) = \dfrac{d^{2}y}{dx^{2}} = f''(x) = y''$

15.44. Tercera derivada $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\right) = \dfrac{d^{3}y}{dx^{3}} = f'''(x) = y'''$

15.45. n-ésima derivada $= \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = \dfrac{d^{n}y}{dx^{n}} = f^{(n)}(x) = y^{(n)}$

Regla de Leibniz para derivadas de orden superior de productos

Sea D^p el operador $\dfrac{d^p}{dx^p}$ de modo que $D^p u = \dfrac{d^p u}{dx^p}$ = la p-ésima derivada de u. Entonces:

15.46. $D^n(uv) = uD^n v + \binom{n}{1}(Du)(D^{n-1}v) + \binom{n}{2}(D^2u)(D^{n-2}v) + \cdots + vD^n u$

donde $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \ldots$ son los coeficientes binomiales (vea la fórmula 3.5).

Como casos especiales tenemos:

15.47. $\dfrac{d^2}{dx^2}(uv) = u\dfrac{d^2v}{dx^2} + 2\dfrac{du}{dx}\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{d^2u}{dx^2}$

15.48. $\dfrac{d^3}{dx^3}(uv) = u\dfrac{d^3v}{dx^3} + 3\dfrac{du}{dx}\dfrac{d^2v}{dx^2} + 3\dfrac{d^2u}{dx^2}\dfrac{dv}{dx} + v\dfrac{d^3u}{dx^3}$

Diferenciales

Sea $y = f(x)$ y $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$. Entonces:

15.49. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = f'(x) + \epsilon = \dfrac{dy}{dx} + \epsilon$

donde $\epsilon \to 0$ conforme $\Delta x \to 0$. Por lo que,

15.50. $\Delta y = f'(x)\Delta x + \epsilon \Delta x$

Si llamamos $\Delta x = dx$ a la diferencial de x, entonces la diferencial de y se define como sigue:

15.51. $dy = f'(x)\,dx$

Reglas para diferenciales

Las reglas para las diferenciales son exactamente análogas a las establecidas para las derivadas. Como ejemplos, tenemos que:

15.52. $d(u \pm v \pm w \pm \cdots) = du \pm dv \pm dw \pm \cdots$

15.53. $d(uv) = u\,dv + v\,du$

15.54. $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$

15.55. $d(u^n) = nu^{n-1}du$

15.56. $d(\text{sen } u) = \cos u\,du$

15.57. $d(\cos u) = -\text{sen } u\,du$

Derivadas parciales

Sea $z = f(x, y)$ una función de dos variables x y y. Entonces, definimos la *derivada parcial* de z o $f(x, y)$ respecto a x, manteniendo a y constante, como sigue:

15.58. $$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Esta derivada parcial se denota también por $\partial z/\partial x$, f_x o z_x.

De manera similar, la derivada parcial de $z = f(x, y)$ respecto a y, manteniendo a x constante, se define como sigue:

15.59. $$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Esta derivada parcial se denota también por $\partial z/\partial y$, f_y o z_y.

Las derivadas parciales de orden superior se definen de la siguiente manera:

15.60. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

15.61. $$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

Los resultados expresados en la fórmula 15.61 son iguales si la función y sus derivadas parciales son continuas; en este caso el orden de diferenciación no importa.

La extensión al caso de funciones con más de dos variables es análoga.

Diferenciales de varias variables

La diferencial de $z = f(x, y)$ se define como sigue:

15.62. $$dz = df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$$

donde $dx = \Delta x$ y $dy = \Delta y$. Note que dz es una función de cuatro variables, x, y, dx y dy, y es lineal en las variables dx y dy.

La extensión al caso de funciones con más de dos variables es análoga.

EJEMPLO: Sea $z = x^2 + 5xy + 2y^3$. Entonces:

$$z_x = 2x + 5y \qquad \text{y} \qquad z_y = 5x + 6y^2$$

de donde:

$$dz = (2x + 5y)\, dx + (5x + 6y^2)\, dy$$

Supongamos que queremos hallar dz para $dx = 2$, $dy = 3$ y en el punto P (4, 1), es decir, cuando $x = 4$ y $y = 1$. Al sustituir, obtenemos:

$$dz = (8 + 5)2 + (20 + 6)3 = 26 + 78 = 104$$

16 INTEGRALES INDEFINIDAS

Definición de la integral indefinida

Si $\frac{dy}{dx} = f(x)$, entonces y es la función cuya derivada es $f(x)$ y se llama la *antiderivada* de $f(x)$ o la *integral indefinida* de $f(x)$, denotada por $\int f(x)\,dx$. De manera similar, si $y = \int f(u)\,du$, entonces $\frac{dy}{du} = f(u)$. Como la derivada de una constante es cero, todas las integrales indefinidas difieren entre sí por una constante arbitraria.

Para la definición de la integral definida, vea la fórmula 18.1. El proceso de encontrar una integral se llama *integración*.

Reglas generales de integración

A continuación, u, v y w son funciones de x; a, b, p, q y n son constantes con las restricciones que en su caso se indiquen; $e = 2.71828\ldots$ es la base natural de los logaritmos; $\ln u$ es el logaritmo natural de u si $u > 0$ (en general, para poder aplicar las fórmulas cuando $u < 0$, basta reemplazar $\ln u$ por $\ln |u|$); todos los ángulos se toman en radianes. Se omiten todas las constantes de integración pues están sobreentendidas.

16.1. $\int a\,dx = ax$

16.2. $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$

16.3. $\int (u \pm v \pm w \pm \cdots)\,dx = \int u\,dx \pm \int v\,dx \pm \int w\,dx \pm \cdots$

16.4. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ (Integración por partes)

Para la integración por partes generalizada vea la fórmula 16.48.

16.5. $\int f(ax)\,dx = \frac{1}{a}\int f(u)\,du$

16.6. $\int F\{f(x)\}\,dx = \int F(u)\frac{dx}{du}\,du = \int \frac{F(u)}{f'(x)}\,du$ donde $u = f(x)$

16.7. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1}, \quad n \neq -1$ (Para $n = -1$, vea la fórmula 16.8)

16.8. $\int \frac{du}{u} = \ln u$ si $u > 0$ o $\ln(-u)$ si $u < 0$
$= \ln |u|$

16.9. $\int e^u\,du = e^u$

16.10. $\int a^u\,du = \int e^{u\ln a}\,du = \frac{e^{u\ln a}}{\ln a} = \frac{a^u}{\ln a}, \quad a > 0,\ a \neq 1$

16.11. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u$

16.12. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u$

16.13. $\int \tan u\,du = \ln \sec u = -\ln \cos u$

16.14. $\int \cot u\,du = \ln \operatorname{sen} u$

16.15. $\int \sec u\,du = \ln(\sec u + \tan u) = \ln \tan\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

16.16. $\int \csc u\,du = \ln(\csc u - \cot u) = \ln \tan \frac{u}{2}$

16.17. $\int \sec^2 u\,du = \tan u$

16.18. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u$

16.19. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u$

16.20. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u$

16.21. $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \frac{u}{2} - \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \frac{1}{2}(u - \operatorname{sen} u \cos u)$

16.22. $\int \cos^2 u\,du = \frac{u}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2u}{4} = \frac{1}{2}(u + \operatorname{sen} u \cos u)$

16.23. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u$

16.24. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u$

16.25. $\int \operatorname{senh} u\,du = \cosh u$

16.26. $\int \cosh u\,du = \operatorname{senh} u$

16.27. $\int \tanh u\,du = \ln \cosh u$

16.28. $\int \coth u\,du = \ln \operatorname{senh} u$

16.29. $\int \operatorname{sech} u\,du = \operatorname{sen}^{-1}(\tanh u)$ o $2\tan^{-1} e^u$

16.30. $\int \operatorname{csch} u\,du = \ln \tanh \frac{u}{2}$ o $-\coth^{-1} e^u$

16.31. $\int \operatorname{sech}^2 u\,du = \tanh u$

16.32. $\int \operatorname{csch}^2 u\,du = -\coth u$

16.33. $\int \tanh^2 u\,du = u - \tanh u$

16.34. $\int \coth^2 u\,du = u - \coth u$

16.35. $\int \operatorname{senh}^2 u\,du = \dfrac{\operatorname{senh} 2u}{4} - \dfrac{u}{2} = \dfrac{1}{2}(\operatorname{senh} u \cosh u - u)$

16.36. $\int \cosh^2 u\,du = \dfrac{\operatorname{senh} 2u}{4} + \dfrac{u}{2} = \dfrac{1}{2}(\operatorname{senh} u \cosh u + u)$

16.37. $\int \operatorname{sech} u \tanh u\,du = -\operatorname{sech} u$

16.38. $\int \operatorname{csch} u \coth u\,du = -\operatorname{csch} u$

16.39. $\int \dfrac{du}{u^2 + a^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a}$

16.40. $\int \dfrac{du}{u^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{u-a}{u+a}\right) = -\dfrac{1}{a}\coth^{-1}\dfrac{u}{a} \quad u^2 > a^2$

16.41. $\int \dfrac{du}{a^2 - u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left(\dfrac{a+u}{a-u}\right) = \dfrac{1}{a}\tanh^{-1}\dfrac{u}{a} \quad u^2 < a^2$

16.42. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a}$

16.43. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) \quad \text{o} \quad \operatorname{senh}^{-1}\dfrac{u}{a}$

16.44. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln(u + \sqrt{u^2 - a^2})$

16.45. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \dfrac{1}{a}\sec^{-1}\left|\dfrac{u}{a}\right|$

16.46. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{u^2 + a^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{a + \sqrt{u^2 + a^2}}{u}\right)$

16.47. $\int \dfrac{du}{u\sqrt{a^2 - u^2}} = -\dfrac{1}{a}\ln\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right)$

16.48. $\int f^{(n)} g\,dx = f^{(n-1)}g - f^{(n-2)}g' + f^{(n-3)}g'' - \cdots (-1)^n \int f g^{(n)}\,dx$

Esta última, es la fórmula *generalizada* para la integración por partes.

Transformaciones importantes

En la práctica, es común que una integral se pueda simplificar mediante el uso de una transformación o sustitución adecuada, junto con la fórmula 16.6. En la lista siguiente se dan algunas transformaciones y sus resultados.

16.49. $\int F(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int F(u)\,du$ donde $u = ax + b$

16.50. $\int F(\sqrt{ax+b})\,dx = \frac{2}{a}\int u\,F(u)\,du$ donde $u = \sqrt{ax+b}$

16.51. $\int F(\sqrt[n]{ax+b})\,dx = \frac{n}{a}\int u^{n-1}F(u)\,du$ donde $u = \sqrt[n]{ax+b}$

16.52. $\int F(\sqrt{a^2-x^2})\,dx = a\int F(a\cos u)\cos u\,du$ donde $x = a\,\text{sen}\,u$

16.53. $\int F(\sqrt{x^2+a^2})\,dx = a\int F(a\sec u)\sec^2 u\,du$ donde $x = a\tan u$

16.54. $\int F(\sqrt{x^2-a^2})\,dx = a\int F(a\tan u)\sec u\tan u\,du$ donde $x = a\sec u$

16.55. $\int F(e^{ax})\,dx = \frac{1}{a}\int \frac{F(u)}{u}\,du$ donde $u = e^{ax}$

16.56. $\int F(\ln x)\,dx = \int F(u)e^u\,du$ donde $u = \ln x$

16.57. $\int F\left(\text{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)dx = a\int F(u)\cos u\,du$ donde $u = \text{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

Para las funciones trigonométricas restantes, se aplican resultados similares.

16.58. $\int F(\text{sen}\,x, \cos x)\,dx = 2\int F\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right)\frac{du}{1+u^2}$ donde $u = \tan\frac{x}{2}$

17 TABLAS DE INTEGRALES INDEFINIDAS NOTABLES

A continuación proporcionamos tablas de integrales indefinidas notables. Las observaciones de la página 67 siguen siendo válidas; a, b, p, q y n son constantes con las restricciones que en su caso se indiquen. $e = 2.71828...$ es la base natural de los logaritmos; ln u es el logaritmo natural de u si $u > 0$ (en general, para poder aplicar las fórmulas cuando $u < 0$, basta reemplazar ln u por ln$|u|$); todos los ángulos se toman en radianes. Se omiten todas las constantes de integración, pues están sobreentendidas. En todo caso se excluye la división por cero.

Las integrales están divididas en tipos que involucran las siguientes expresiones algebraicas y funciones:

(1) $ax + b$
(2) $\sqrt{ax+b}$
(3) $ax + b$ y $px + q$
(4) $\sqrt{ax+b}$ y $px + q$
(5) $\sqrt{ax+b}$ y $\sqrt{px+q}$
(6) $x^2 + a^2$
(7) $x^2 - a^2$, con $x^2 > a^2$
(8) $a^2 - x^2$, con $x^2 < a^2$
(9) $\sqrt{x^2+a^2}$
(10) $\sqrt{x^2-a^2}$
(11) $\sqrt{a^2-x^2}$
(12) $ax^2 + bx + c$
(13) $\sqrt{ax^2+bx+c}$
(14) $x^3 + a^3$
(15) $x^4 \pm a^4$
(16) $x^n \pm a^n$
(17) sen ax
(18) cos ax
(19) sen ax y cos ax
(20) tan ax
(21) cot ax
(22) sec ax
(23) csc ax
(24) funciones trigonométricas inversas
(25) e^{ax}
(26) ln x
(27) senh ax
(28) cosh ax
(29) senh ax y cosh ax
(30) tanh ax
(31) coth ax
(32) sech ax
(33) csch ax
(34) funciones hiperbólicas inversas

Algunas integrales contienen los números de Bernoulli B_n y los números de Euler E_n definidos en el capítulo 23.

(1) Integrales que contienen $ax + b$

17.1.1. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\ln(ax+b)$

17.1.2. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{ax+b} = \frac{x}{a} - \frac{b}{a^2}\ln(ax+b)$

17.1.3. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{ax+b} = \frac{(ax+b)^2}{2a^3} - \frac{2b(ax+b)}{a^3} + \frac{b^2}{a^3}\ln(ax+b)$

17.1.4. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax+b)} = \frac{1}{b}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$

17.1.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(ax+b)} = -\frac{1}{bx} + \frac{a}{b^2}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$

17.1.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{(ax+b)^2} = \frac{-1}{a(ax+b)}$

17.1.7. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2} = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{1}{a^2}\ln(ax+b)$

17.1.8. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(ax+b)^2} = \frac{ax+b}{a^3} - \frac{b^2}{a^3(ax+b)} - \frac{2b}{a^3}\ln(ax+b)$

17.1.9. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(ax+b)^2} = \frac{1}{b(ax+b)} + \frac{1}{b^2}\ln\left(\frac{x}{ax+b}\right)$

17.1.10. $$\int \frac{dx}{x^2(ax+b)^2} = \frac{-a}{b^2(ax+b)} - \frac{1}{b^2 x} + \frac{2a}{b^3}\ln\left(\frac{ax+b}{x}\right)$$

17.1.11. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{2(ax+b)^2}$$

17.1.12. $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^3} = \frac{-1}{a^2(ax+b)} + \frac{b}{2a^2(ax+b)^2}$$

17.1.13. $$\int \frac{x^2 dx}{(ax+b)^3} = \frac{2b}{a^3(ax+b)} - \frac{b^2}{2a^3(ax+b)^2} + \frac{1}{a^3}\ln(ax+b)$$

17.1.14. $$\int (ax+b)^n\,dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a}.$$ Si $n = -1$, vea la fórmula 17.1.1.

17.1.15. $$\int x(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^2} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^2}, \quad n \neq -1, -2$$

Si $n = -1, -2$, vea las fórmulas 17.1.2 y 17.1.7.

17.1.16. $$\int x^2(ax+b)^n dx = \frac{(ax+b)^{n+3}}{(n+3)a^3} - \frac{2b(ax+b)^{n+2}}{(n+2)a^3} + \frac{b^2(ax+b)^{n+1}}{(n+1)a^3}$$

Si $n = -1, -2, -3$, vea las fórmulas 17.1.3 y 17.1.8 y 17.1.13.

17.1.17. $$\int x^m(ax+b)^n\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}(ax+b)^n}{m+n+1} + \dfrac{nb}{m+n+1}\int x^m(ax+b)^{n-1}\,dx \\ \dfrac{x^m(ax+b)^{n+1}}{(m+n+1)a} - \dfrac{mb}{(m+n+1)a}\int x^{m-1}(ax+b)^n dx \\ \dfrac{-x^{m+1}(ax+b)^{n+1}}{(n+1)b} + \dfrac{m+n+2}{(n+1)b}\int x^m(ax+b)^{n+1}dx \end{cases}$$

(2) Integrales que contienen $\sqrt{ax+b}$

17.2.1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a}$$

17.2.2. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(ax-2b)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

17.2.3. $$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{ax+b}} = \frac{2(3a^2x^2 - 4abx + 8b^2)}{15a^3}\sqrt{ax+b}$$

17.2.4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{b}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{ax+b}-\sqrt{b}}{\sqrt{ax+b}+\sqrt{b}}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-b}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{ax+b}{-b}} \end{cases}$$

17.2.5. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax+b}} = -\frac{\sqrt{ax+b}}{bx} - \frac{a}{2b}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$$ (Vea la fórmula 17.2.12.)

17.2.6. $$\int \sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a}$$

17.2.7. $$\int x\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(3ax-2b)}{15a^2}\sqrt{(ax+b)^3}$$

17.2.8. $\int x^2\sqrt{ax+b}\,dx = \dfrac{2(15a^2x^2-12abx+8b^2)}{105a^3}\sqrt{(ax+b)^3}$

17.2.9. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x}dx = 2\sqrt{ax+b}+b\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$ (Vea la fórmula 17.2.12.)

17.2.10. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^2}dx = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{x}+\dfrac{a}{2}\int \dfrac{dx}{x\sqrt{ax+b}}$ (Vea la fórmula 17.2.12.)

17.2.11. $\int \dfrac{x^m}{\sqrt{ax+b}}dx = \dfrac{2x^m\sqrt{ax+b}}{(2m+1)a}-\dfrac{2mb}{(2m+1)a}\int \dfrac{x^{m-1}}{\sqrt{ax+b}}dx$

17.2.12. $\int \dfrac{dx}{x^m\sqrt{ax+b}} = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)bx^{m-1}}-\dfrac{(2m-3)a}{(2m-2)b}\int \dfrac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}$

17.2.13. $\int x^m\sqrt{ax+b}\,dx = \dfrac{2x^m}{(2m+3)a}(ax+b)^{3/2}-\dfrac{2mb}{(2m+3)a}\int x^{m-1}\sqrt{ax+b}\,dx$

17.2.14. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^m}dx = -\dfrac{\sqrt{ax+b}}{(m-1)x^{m-1}}+\dfrac{a}{2(m-1)}\int \dfrac{dx}{x^{m-1}\sqrt{ax+b}}$

17.2.15. $\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^m}dx = \dfrac{-(ax+b)^{3/2}}{(m-1)bx^{m-1}}-\dfrac{(2m-5)a}{(2m-2)b}\int \dfrac{\sqrt{ax+b}}{x^{m-1}}dx$

17.2.16. $\int (ax+b)^{m/2}\,dx = \dfrac{2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)}$

17.2.17. $\int x(ax+b)^{m/2}dx = \dfrac{2(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^2(m+4)}-\dfrac{2b(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^2(m+2)}$

17.2.18. $\int x^2(ax+b)^{m/2}\,dx = \dfrac{2(ax+b)^{(m+6)/2}}{a^3(m+6)}-\dfrac{4b(ax+b)^{(m+4)/2}}{a^3(m+4)}+\dfrac{2b^2(ax+b)^{(m+2)/2}}{a^3(m+2)}$

17.2.19. $\int \dfrac{(ax+b)^{m/2}}{x}\,dx = \dfrac{2(ax+b)^{m/2}}{m}+b\int \dfrac{(ax+b)^{(m-2)/2}}{x}dx$

17.2.20. $\int \dfrac{(ax+b)^{m/2}}{x^2}dx = -\dfrac{(ax+b)^{(m+2)/2}}{bx}+\dfrac{ma}{2b}\int \dfrac{(ax+b)^{m/2}}{x}dx$

17.2.21. $\int \dfrac{dx}{x(ax+b)^{m/2}} = \dfrac{2}{(m-2)b(ax+b)^{(m-2)/2}}+\dfrac{1}{b}\int \dfrac{dx}{x(ax+b)^{(m-2)/2}}$

(3) Integrales que contienen $ax + b$ y $px + q$

17.3.1. $\int \dfrac{dx}{(ax+b)(px+q)} = \dfrac{1}{bp-aq}\ln\left(\dfrac{px+q}{ax+b}\right)$

17.3.2. $\int \dfrac{x\,dx}{(ax+b)(px+q)} = \dfrac{1}{bp-aq}\left\{\dfrac{b}{a}\ln(ax+b)-\dfrac{q}{p}\ln(px+q)\right\}$

17.3.3. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{1}{ax+b} + \frac{p}{bp-aq}\ln\left(\frac{px+q}{ax+b}\right)\right\}$$

17.3.4. $$\int \frac{x\,dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{1}{bp-aq}\left\{\frac{q}{bp-aq}\ln\left(\frac{ax+b}{px+q}\right) - \frac{b}{a(ax+b)}\right\}$$

17.3.5. $$\int \frac{x^2dx}{(ax+b)^2(px+q)} = \frac{b^2}{(bp-aq)a^2(ax+b)} + \frac{1}{(bp-aq)^2}\left\{\frac{q^2}{p}\ln(px+q) + \frac{b(bp-2aq)}{a^2}\ln(ax+b)\right\}$$

17.3.6. $$\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^n} = \frac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\frac{1}{(ax+b)^{m-1}(px+q)^{n-1}} + a(m+n-2)\int \frac{dx}{(ax+b)^m(px+q)^{n-1}}\right\}$$

17.3.7. $$\int \frac{ax+b}{px+q}dx = \frac{ax}{p} + \frac{bp-aq}{p^2}\ln(px+q)$$

17.3.8. $$\int \frac{(ax+b)^m}{(px+q)^n}dx = \begin{cases} \dfrac{-1}{(n-1)(bp-aq)}\left\{\dfrac{(ax+b)^{m+1}}{(px+q)^{n-1}} + (n-m-2)a\int \dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}}dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-m-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} + m(bp-aq)\int \dfrac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^n}dx\right\} \\ \dfrac{-1}{(n-1)p}\left\{\dfrac{(ax+b)^m}{(px+q)^{n-1}} - ma\int \dfrac{(ax+b)^{m-1}}{(px+q)^{n-1}}dx\right\} \end{cases}$$

(4) Integrales que contienen $\sqrt{ax+b}$ y $px+q$

17.4.1. $$\int \frac{px+q}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(apx+3aq-2bp)}{3a^2}\sqrt{ax+b}$$

17.4.2. $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{ax+b}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{bp-aq}\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{aq-bp}\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

17.4.3. $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{px+q}dx = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} + \dfrac{\sqrt{bp-aq}}{p\sqrt{p}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{p(ax+b)}-\sqrt{bp-aq}}{\sqrt{p(ax+b)}+\sqrt{bp-aq}}\right) \\ \dfrac{2\sqrt{ax+b}}{p} - \dfrac{2\sqrt{aq-bp}}{p\sqrt{p}}\tan^{-1}\sqrt{\dfrac{p(ax+b)}{aq-bp}} \end{cases}$$

17.4.4. $$\int (px+q)^n\sqrt{ax+b}\,dx = \frac{2(px+q)^{n+1}\sqrt{ax+b}}{(2n+3)p} + \frac{bp-aq}{(2n+3)p}\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}$$

17.4.5. $$\int \frac{dx}{(px+q)^n\sqrt{ax+b}} = \frac{\sqrt{ax+b}}{(n-1)(aq-bp)(px+q)^{n-1}} + \frac{(2n-3)a}{2(n-1)(aq-bp)}\int \frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

17.4.6. $$\int \frac{(px+q)^n}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(px+q)^n\sqrt{ax+b}}{(2n+1)a} + \frac{2n(aq-bp)}{(2n+1)a}\int \frac{(px+q)^{n-1}dx}{\sqrt{ax+b}}$$

17.4.7. $$\int \frac{\sqrt{ax+b}}{(px+q)^n}dx = \frac{-\sqrt{ax+b}}{(n-1)p(px+q)^{n-1}} + \frac{a}{2(n-1)p}\int \frac{dx}{(px+q)^{n-1}\sqrt{ax+b}}$$

(5) Integrales que contienen $\sqrt{ax+b}$ y $\sqrt{px+q}$

17.5.1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{ap}} \ln\left(\sqrt{a(px+q)} + \sqrt{p(ax+b)}\right) \\ \dfrac{2}{\sqrt{-ap}} \tan^{-1} \sqrt{\dfrac{-p(ax+b)}{a(px+q)}} \end{cases}$$

17.5.2. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{ap} - \frac{bp+aq}{2ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

17.5.3. $$\int \sqrt{(ax+b)(px+q)}\,dx = \frac{2apx+bp+aq}{4ap}\sqrt{(ax+b)(px+q)} - \frac{(bp-aq)^2}{8ap} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

17.5.4. $$\int \sqrt{\frac{px+q}{ax+b}}\,dx = \frac{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}{a} + \frac{aq-bp}{2a} \int \frac{dx}{\sqrt{(ax+b)(px+q)}}$$

17.5.5. $$\int \frac{dx}{(px+q)\sqrt{(ax+b)(px+q)}} = \frac{2\sqrt{ax+b}}{(aq-bp)\sqrt{px+q}}$$

(6) Integrales que contienen $x^2 + a^2$

17.6.1. $$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

17.6.2. $$\int \frac{x\,dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$$

17.6.3. $$\int \frac{x^2 dx}{x^2+a^2} = x - a\,\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

17.6.4. $$\int \frac{x^3 dx}{x^2+a^2} = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x^2+a^2)$$

17.6.5. $$\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

17.6.6. $$\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)} = -\frac{1}{a^2 x} - \frac{1}{a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

17.6.7. $$\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$$

17.6.8. $$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{x}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

17.6.9. $$\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2+a^2)}$$

17.6.10. $$\int \frac{x^2 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a}\tan^{-1}\frac{x}{a}$$

17.6.11. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2+a^2)^2} = \frac{a^2}{2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2+a^2)$

17.6.12. $\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^2} = \frac{1}{2a^2(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$

17.6.13. $\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{3}{2a^5}\tan^{-1}\frac{x}{a}$

17.6.14. $\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2+a^2)} - \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right)$

17.6.15. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{n-1}}$

17.6.16. $\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2+a^2)^{n-1}}$

17.6.17. $\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{n-1}}$

17.6.18. $\int \frac{x^m dx}{(x^2+a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^{n-1}} - a^2\int \frac{x^{m-2} dx}{(x^2+a^2)^n}$

17.6.19. $\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2+a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2+a^2)^n}$

(7) Integrales que contienen $x^2 - a^2$, $x^2 > a^2$

17.7.1. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$ o $-\frac{1}{a}\coth^{-1}\frac{x}{a}$

17.7.2. $\int \frac{x\,dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)$

17.7.3. $\int \frac{x^2 dx}{x^2-a^2} = x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.4. $\int \frac{x^3 dx}{x^2-a^2} = \frac{x^2}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x^2-a^2)$

17.7.5. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2-a^2}{x^2}\right)$

17.7.6. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)} = \frac{1}{a^2 x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.7. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)} = \frac{1}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

17.7.8. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2a^2(x^2-a^2)} - \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.9. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2(x^2-a^2)}$

17.7.10. $\int \frac{x^2 dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-x}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.11. $\int \frac{x^3 dx}{(x^2-a^2)^2} = \frac{-a^2}{2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2}\ln(x^2-a^2)$

17.7.12. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^2} = \frac{-1}{2a^2(x^2-a^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

17.7.13. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{x}{2a^4(x^2-a^2)} - \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$

17.7.14. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^2} = -\frac{1}{2a^4x^2} - \frac{1}{2a^4(x^2-a^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{x^2-a^2}\right)$

17.7.15. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-x}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{n-1}}$

17.7.16. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}}$

17.7.17. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^n} = \frac{-1}{2(n-1)a^2(x^2-a^2)^{n-1}} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{n-1}}$

17.7.18. $\int \frac{x^m dx}{(x^2-a^2)^n} = \int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2-a^2)^{n-1}} + a^2 \int \frac{x^{m-2}dx}{(x^2-a^2)^n}$

17.7.19. $\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(x^2-a^2)^n} - \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(x^2-a^2)^{n-1}}$

(8) Integrales que contienen $x^2 - a^2$, $x^2 < a^2$

17.8.1. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$ o $\frac{1}{a}\tanh^{-1}\frac{x}{a}$

17.8.2. $\int \frac{x\,dx}{a^2-x^2} = -\frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)$

17.8.3. $\int \frac{x^2 dx}{a^2-x^2} = -x + \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.4. $\int \frac{x^3 dx}{a^2-x^2} = -\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(a^2-x^2)$

17.8.5. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)} = \frac{1}{2a^2}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.6. $\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)} = -\frac{1}{a^2x} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.7. $\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)} = -\frac{1}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.8. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{4a^3}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.9. $\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2(a^2-x^2)}$

17.8.10. $\int \frac{x^2dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{x}{2(a^2-x^2)} - \frac{1}{4a}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.11. $\int \frac{x^3dx}{(a^2-x^2)^2} = \frac{a^2}{2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2}\ln(a^2-x^2)$

17.8.12. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^2} = \frac{1}{2a^2(a^2-x^2)} + \frac{1}{2a^4}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.13. $\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{a^4x} + \frac{x}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{3}{4a^5}\ln\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$

17.8.14. $\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^2} = \frac{-1}{2a^4x^2} + \frac{1}{2a^4(a^2-x^2)} + \frac{1}{a^6}\ln\left(\frac{x^2}{a^2-x^2}\right)$

17.8.15. $\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{x}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{(2n-2)a^2}\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$

17.8.16. $\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}}$

17.8.17. $\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{2(n-1)a^2(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{n-1}}$

17.8.18. $\int \frac{x^m dx}{(a^2-x^2)^n} = a^2\int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2-x^2)^n} - \int \frac{x^{m-2}dx}{(a^2-x^2)^{n-1}}$

17.8.19. $\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^n} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^m(a^2-x^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{x^{m-2}(a^2-x^2)^n}$

(9) Integrales que contienen $\sqrt{x^2+a^2}$

17.9.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$ o $\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}$

17.9.2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2}$

17.9.3. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.4. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2+a^2}$

17.9.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^2x}$

17.9.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2+a^2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.8. $\displaystyle\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.9. $\displaystyle\int x\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$

17.9.10. $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} - \frac{a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.11. $\displaystyle\int x^3\sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{3/2}}{3}$

17.9.12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2+a^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{2x^2} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.16. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.17. $\displaystyle\int \frac{x^2dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-x}{\sqrt{x^2+a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.18. $\displaystyle\int \frac{x^3dx}{(x^2+a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(x^2+a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2+a^2}}$

17.9.21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(x^2+a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{x^2+a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2+a^2}} + \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.22. $\displaystyle\int (x^2+a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2+a^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{x^2+a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.23. $\displaystyle\int x(x^2+a^2)^{3/2}dx = \frac{(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$

17.9.24. $\int x^2(x^2+a^2)^{3/2}dx = \frac{x(x^2+a^2)^{5/2}}{6} - \frac{a^2x(x^2+a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2+a^2}}{16} - \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.25. $\int x^3(x^2+a^2)^{3/2}dx = \frac{(x^2+a^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(x^2+a^2)^{5/2}}{5}$

17.9.26. $\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x}dx = \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2+a^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

17.9.27. $\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^2}dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2+a^2}}{2} + \frac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$

17.9.28. $\int \frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{x^3}dx = -\frac{(x^2+a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3}{2}\sqrt{x^2+a^2} - \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right)$

(10) Integrales que contienen $\sqrt{x^2-a^2}$

17.10.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln(x+\sqrt{x^2-a^2}),\ \int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \sqrt{x^2-a^2}$

17.10.2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.3. $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{x^2-a^2}$

17.10.4. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^2x}$

17.10.6. $\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2a^2x^2} + \frac{1}{2a^3}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.7. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.8. $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$

17.10.9. $\int x^2\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} - \frac{a^4}{8}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.10. $\int x^3\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{3/2}}{3}$

17.10.11. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}dx = \sqrt{x^2-a^2} - a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.12. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.13. $\int \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.14. $\int \frac{dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{a^2\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.15. $\int \frac{x\,dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.16. $\int \frac{x^2dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}} + \ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.17. $\int \frac{x^3dx}{(x^2-a^2)^{3/2}} = \sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.18. $\int \frac{dx}{x(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{-1}{a^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{1}{a^3}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.19. $\int \frac{dx}{x^2(x^2-a^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a^4x} - \frac{x}{a^4\sqrt{x^2-a^2}}$

17.10.20. $\int \frac{dx}{x^3(x^2-a^2)^{3/2}} = \frac{1}{2a^2x^2\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^4\sqrt{x^2-a^2}} - \frac{3}{2a^5}\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.21. $\int (x^2-a^2)^{3/2}\,dx = \frac{x(x^2-a^2)^{3/2}}{4} - \frac{3a^2x\sqrt{x^2-a^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.22. $\int x(x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$

17.10.23. $\int x^2(x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{x(x^2-a^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(x^2-a^2)^{3/2}}{24} - \frac{a^4x\sqrt{x^2-a^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.24. $\int x^3(x^2-a^2)^{3/2}dx = \frac{(x^2-a^2)^{7/2}}{7} + \frac{a^2(x^2-a^2)^{5/2}}{5}$

17.10.25. $\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x}dx = \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{x^2-a^2} + a^3\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

17.10.26. $\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^2}dx = -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x} + \frac{3x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$

17.10.27. $\int \frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{x^3}dx = -\frac{(x^2-a^2)^{3/2}}{2x^2} + \frac{3\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{3}{2}a\sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right|$

(11) Integrales que contienen $\sqrt{a^2-x^2}$

17.11.1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

17.11.2. $\int \frac{x\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\sqrt{a^2-x^2}$

17.11.3. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

17.11.4. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} - a^2\sqrt{a^2-x^2}$

17.11.5. $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{1}{a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.6. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^2 x}$

17.11.7. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3\sqrt{a^2-x^2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2a^2x^2} - \frac{1}{2a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.8. $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

17.11.9. $\displaystyle\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$

17.11.10. $\displaystyle\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{a^2 x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{a^4}{8}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

17.11.11. $\displaystyle\int x^3\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{3/2}}{3}$

17.11.12. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.13. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

17.11.14. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x^3}dx = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.15. $\displaystyle\int \frac{dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{a^2\sqrt{a^2-x^2}}$

17.11.16. $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$

17.11.17. $\displaystyle\int \frac{x^2 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}} - \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

17.11.18. $\displaystyle\int \frac{x^3 dx}{(a^2-x^2)^{3/2}} = \sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$

17.11.19. $\displaystyle\int \frac{dx}{x(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{1}{a^2\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{1}{a^3}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.20. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2(a^2-x^2)^{3/2}} = -\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a^4 x} + \frac{x}{a^4\sqrt{a^2-x^2}}$

17.11.21. $\displaystyle\int \frac{dx}{x^3(a^2-x^2)^{3/2}} = \frac{-1}{2a^2x^2\sqrt{a^2-x^2}} + \frac{3}{2a^4\sqrt{a^2-x^2}} - \frac{3}{2a^5}\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$

17.11.22. $$\int (a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{x(a^2-x^2)^{3/2}}{4} + \frac{3a^2x\sqrt{a^2-x^2}}{8} + \frac{3}{8}a^4 \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$$

17.11.23. $$\int x(a^2-x^2)^{3/2}dx = -\frac{(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$$

17.11.24. $$\int x^2(a^2-x^2)^{3/2}dx = -\frac{x(a^2-x^2)^{5/2}}{6} + \frac{a^2x(a^2-x^2)^{3/2}}{24} + \frac{a^4x\sqrt{a^2-x^2}}{16} + \frac{a^6}{16}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$$

17.11.25. $$\int x^3(a^2-x^2)^{3/2}dx = \frac{(a^2-x^2)^{7/2}}{7} - \frac{a^2(a^2-x^2)^{5/2}}{5}$$

17.11.26. $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x}dx = \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{3} + a^2\sqrt{a^2-x^2} - a^3\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

17.11.27. $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^2}dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x} - \frac{3x\sqrt{a^2-x^2}}{2} - \frac{3}{2}a^2 \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$$

17.11.28. $$\int \frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{x^3}dx = -\frac{(a^2-x^2)^{3/2}}{2x^2} - \frac{3\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{3}{2}a\ln\left(\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right)$$

(12) Integrales que contienen $ax^2 + bx + c$

17.12.1. $$\int \frac{dx}{ax^2+bx+c} = \begin{cases} \dfrac{2}{\sqrt{4ac-b^2}}\tan^{-1}\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\ln\left(\dfrac{2ax+b-\sqrt{b^2-4ac}}{2ax+b+\sqrt{b^2-4ac}}\right) \end{cases}$$

Si $b^2 = 4ac$, $ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2$, entonces pueden emplearse las fórmulas 17.1.6 a 17.1.10 y 17.1.14 a 17.1.17. Si $b = 0$, utilice los resultados de la página 75. Si a o $c = 0$, utilice los resultados de las páginas 71 y 72.

17.12.2. $$\int \frac{x\,dx}{ax^2+bx+c} = \frac{1}{2a}\ln(ax^2+bx+c) - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.3. $$\int \frac{x^2dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x}{a} - \frac{b}{2a^2}\ln(ax^2+bx+c) + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.4. $$\int \frac{x^m dx}{ax^2+bx+c} = \frac{x^{m-1}}{(m-1)a} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{m-2}dx}{ax^2+bx+c} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{m-1}dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.5. $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)} = \frac{1}{2c}\ln\left(\frac{x^2}{ax^2+bx+c}\right) - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.6. $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)} = \frac{b}{2c^2}\ln\left(\frac{ax^2+bx+c}{x^2}\right) - \frac{1}{cx} + \frac{b^2-2ac}{2c^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.7. $$\int \frac{dx}{x^n(ax^2+bx+c)} = -\frac{1}{(n-1)cx^{n-1}} - \frac{b}{c}\int \frac{dx}{x^{n-1}(ax^2+bx+c)} - \frac{a}{c}\int \frac{dx}{x^{n-2}(ax^2+bx+c)}$$

17.12.8. $$\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{2ax+b}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2a}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.9. $$\int \frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^2} = -\frac{bx+2c}{(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.10. $$\int \frac{x^2dx}{(ax^2+bx+c)^2} = \frac{(b^2-2ac)x+bc}{a(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)} + \frac{2c}{4ac-b^2}\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$$

17.12.11. $$\int \frac{x^m dx}{(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{x^{m-1}}{(2n-m-1)a(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{(m-1)c}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-2}dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{(n-m)b}{(2n-m-1)a}\int \frac{x^{m-1}dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

17.12.12. $$\int \frac{x^{2n-1}dx}{(ax^2+bx+c)^n} = \frac{1}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{c}{a}\int \frac{x^{2n-3}dx}{(ax^2+bx+c)^n} - \frac{b}{a}\int \frac{x^{2n-2}dx}{(ax^2+bx+c)^n}$$

17.12.13. $$\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2} = \frac{1}{2c(ax^2+bx+c)} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{1}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)}$$

17.12.14. $$\int \frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^2} = -\frac{1}{cx(ax^2+bx+c)} - \frac{3a}{c}\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^2} - \frac{2b}{c}\int \frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^2}$$

17.12.15. $$\int \frac{dx}{x^m(ax^2+bx+c)^n} = -\frac{1}{(m-1)cx^{m-1}(ax^2+bx+c)^{n-1}} - \frac{(m+2n-3)a}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-2}(ax^2+bx+c)^n} - \frac{(m+n-2)b}{(m-1)c}\int \frac{dx}{x^{m-1}(ax^2+bx+c)^n}$$

(13) Integrales que contienen $\sqrt{ax^2+bx+c}$

En los siguientes resultados, si $b^2 = 4ac$ y $\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}(x+b/2a)$, entonces se pueden emplear las fórmulas 17.1. Si $b = 0$, utilice las fórmulas 17.9. Si $a = 0$ o $c = 0$, use las fórmulas 17.2 y 17.5.

17.13.1. $$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(2\sqrt{a}\sqrt{ax^2+bx+c}+2ax+b\right) \\ -\dfrac{1}{\sqrt{-a}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad \text{o} \quad \dfrac{1}{\sqrt{a}}\operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{2ax+b}{\sqrt{4ac-b^2}}\right) \end{cases}$$

17.13.2. $$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{a} - \frac{b}{2a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.3. $$\int \frac{x^2dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{2ax-3b}{4a^2}\sqrt{ax^2+bx+c} + \frac{3b^2-4ac}{8a^2}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.4. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}} = \begin{cases} -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\ln\left(\dfrac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2+bx+c}+bx+2c}{x}\right) \\ \dfrac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{b^2-4ac}}\right) \quad \text{o} \quad -\dfrac{1}{\sqrt{c}}\operatorname{senh}^{-1}\left(\dfrac{bx+2c}{|x|\sqrt{4ac-b^2}}\right) \end{cases}$$

17.13.5. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{ax^2+bx+c}} = -\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{cx} - \frac{b}{2c}\int \frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.6. $$\int \sqrt{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{(2ax+b)\sqrt{ax^2+bx+c}}{4a} + \frac{4ac-b^2}{8a}\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.7. $$\int x\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{(ax^2+bx+c)^{3/2}}{3a}-\frac{b(2ax+b)}{8a^2}\sqrt{ax^2+bx+c}-\frac{b(4ac-b^2)}{16a^2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.8. $$\int x^2\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx=\frac{6ax-5b}{24a^2}(ax^2+bx+c)^{3/2}+\frac{5b^2-4ac}{16a^2}\int\sqrt{ax^2+bx+c}\,dx$$

17.13.9. $$\int\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}dx=\sqrt{ax^2+bx+c}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+c\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.10. $$\int\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x^2}dx=-\frac{\sqrt{ax^2+bx+c}}{x}+a\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{b}{2}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.11. $$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}=\frac{2(2ax+b)}{(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.12. $$\int\frac{x\,dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}=\frac{2(bx+2c)}{(b^2-4ac)\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.13. $$\int\frac{x^2dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}=\frac{(2b^2-4ac)x+2bc}{a(4ac-b^2)\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{1}{a}\int\frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.14. $$\int\frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{3/2}}=\frac{1}{c\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}$$

17.13.15. $$\int\frac{dx}{x^2(ax^2+bx+c)^{3/2}}=-\frac{ax^2+2bx+c}{c^2x\sqrt{ax^2+bx+c}}+\frac{b^2-2ac}{2c^2}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{3/2}}-\frac{3b}{2c^2}\int\frac{dx}{x\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

17.13.16. $$\int(ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx=\frac{(2ax+b)(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}{4a(n+1)}+\frac{(2n+1)(4ac-b^2)}{8a(n+1)}\int(ax^2+bx+c)^{n-1/2}\,dx$$

17.13.17. $$\int x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx=\frac{(ax^2+bx+c)^{n+3/2}}{a(2n+3)}-\frac{b}{2a}\int(ax^2+bx+c)^{n+1/2}\,dx$$

17.13.18. $$\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}=\frac{2(2ax+b)}{(2n-1)(4ac-b^2)(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}+\frac{8a(n-1)}{(2n-1)(4ac-b^2)}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}$$

17.13.19. $$\int\frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}=\frac{1}{(2n-1)c(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}+\frac{1}{c}\int\frac{dx}{x(ax^2+bx+c)^{n-1/2}}-\frac{b}{2c}\int\frac{dx}{(ax^2+bx+c)^{n+1/2}}$$

(14) Integrales que contienen $x^3 + a^3$

Observe que para las fórmulas que contienen $x^3 - a^3$, se puede reemplazar a por $-a$.

17.14.1. $$\int \frac{dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a^2}\ln\left(\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2}\right) + \frac{1}{a^2\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.2. $$\int \frac{x\,dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{6a}\ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}\right) + \frac{1}{a\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.3. $$\int \frac{x^2dx}{x^3+a^3} = \frac{1}{3}\ln(x^3+a^3)$$

17.14.4. $$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)} = \frac{1}{3a^3}\ln\left(\frac{x^3}{x^3+a^3}\right)$$

17.14.5. $$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)} = -\frac{1}{a^3x} - \frac{1}{6a^4}\ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}\right) - \frac{1}{a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.6. $$\int \frac{dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{9a^5}\ln\left(\frac{(x+a)^2}{x^2-ax+a^2}\right) + \frac{2}{3a^5\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.7. $$\int \frac{x\,dx}{(x^3+a^3)^2} = \frac{x^2}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{18a^4}\ln\left(\frac{x^2-ax+a^2}{(x+a)^2}\right) + \frac{1}{3a^4\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-a}{a\sqrt{3}}$$

17.14.8. $$\int \frac{x^2dx}{(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{3(x^3+a^3)}$$

17.14.9. $$\int \frac{dx}{x(x^3+a^3)^2} = \frac{1}{3a^3(x^3+a^3)} + \frac{1}{3a^6}\ln\left(\frac{x^3}{x^3+a^3}\right)$$

17.14.10. $$\int \frac{dx}{x^2(x^3+a^3)^2} = -\frac{1}{a^6x} - \frac{x^2}{3a^6(x^3+a^3)} - \frac{4}{3a^6}\int \frac{x\,dx}{x^3+a^3}$$ (Vea la fórmula 17.14.2.)

17.14.11. $$\int \frac{x^m dx}{x^3+a^3} = \frac{x^{m-2}}{m-2} - a^3\int \frac{x^{m-3}dx}{x^3+a^3}$$

17.14.12. $$\int \frac{dx}{x^n(x^3+a^3)} = \frac{-1}{a^3(n-1)x^{n-1}} - \frac{1}{a^3}\int \frac{dx}{x^{n-3}(x^3+a^3)}$$

(15) Integrales que contienen $x^4 \pm a^4$

17.15.1. $$\int \frac{dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a^3\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a^3\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(1-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(1+\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\right]$$

17.15.2. $$\int \frac{x\,dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{2a^2}\tan^{-1}\frac{x^2}{a^2}$$

17.15.3. $$\int \frac{x^2dx}{x^4+a^4} = \frac{1}{4a\sqrt{2}}\ln\left(\frac{x^2-ax\sqrt{2}+a^2}{x^2+ax\sqrt{2}+a^2}\right) - \frac{1}{2a\sqrt{2}}\left[\tan^{-1}\left(1-\frac{x\sqrt{2}}{a}\right) - \tan^{-1}\left(1+\frac{x\sqrt{2}}{a}\right)\right]$$

17.15.4. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 + a^4} = \frac{1}{4} \ln (x^4 + a^4)$

17.15.5. $\int \frac{dx}{x(x^4 + a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln \left(\frac{x^4}{x^4 + a^4} \right)$

17.15.6. $\int \frac{dx}{x^2(x^4 + a^4)} = -\frac{1}{a^4 x} - \frac{1}{4a^5 \sqrt{2}} \ln \left(\frac{x^2 - ax\sqrt{2} + a^2}{x^2 + ax\sqrt{2} + a^2} \right)$
$+ \frac{1}{2a^5 \sqrt{2}} \left[\tan^{-1} \left(1 - \frac{x\sqrt{2}}{a} \right) - \tan^{-1} \left(1 + \frac{x\sqrt{2}}{a} \right) \right]$

17.15.7. $\int \frac{dx}{x^3(x^4 + a^4)} = -\frac{1}{2a^4 x^2} - \frac{1}{2a^6} \tan^{-1} \frac{x^2}{a^2}$

17.15.8. $\int \frac{dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a^3} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right) - \frac{1}{2a^3} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

17.15.9. $\int \frac{x\, dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a^2} \ln \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \right)$

17.15.10. $\int \frac{x^2 dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right) + \frac{1}{2a} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

17.15.11. $\int \frac{x^3 dx}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4} \ln (x^4 - a^4)$

17.15.12. $\int \frac{dx}{x(x^4 - a^4)} = \frac{1}{4a^4} \ln \left(\frac{x^4 - a^4}{x^4} \right)$

17.15.13. $\int \frac{dx}{x^3(x^4 - a^4)} = \frac{1}{a^4 x} + \frac{1}{4a^5} \ln \left(\frac{x - a}{x + a} \right) + \frac{1}{2a^5} \tan^{-1} \frac{x}{a}$

17.15.14. $\int \frac{dx}{x^3(x^4 - a^4)} = \frac{1}{2a^4 x^2} + \frac{1}{4a^6} \ln \left(\frac{x^2 - a^2}{x^2 + a^2} \right)$

(16) Integrales que contienen $x^n \pm a^n$

17.16.1. $\int \frac{dx}{x(x^n + a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln \left(\frac{x^n}{x^n + a^n} \right)$

17.16.2. $\int \frac{x^{n-1} dx}{x^n + a^n} = \frac{1}{n} \ln (x^n + a^n)$

17.16.3. $\int \frac{x^m dx}{(x^n + a^n)^r} = \int \frac{x^{m-n} dx}{(x^n + a^n)^{r-1}} - a^n \int \frac{x^{m-n} dx}{(x^n + a^n)^r}$

17.16.4. $\int \frac{dx}{x^m (x^n + a^n)^r} = \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^m (x^n + a^n)^{r-1}} - \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^{m-n} (x^n + a^n)^r}$

17.16.5. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n + a^n}} = \frac{1}{n\sqrt{a^n}} \ln \left(\frac{\sqrt{x^n + a^n} - \sqrt{a^n}}{\sqrt{x^n + a^n} + \sqrt{a^n}} \right)$

17.16.6. $$\int \frac{dx}{x(x^n - a^n)} = \frac{1}{na^n} \ln\left(\frac{x^n - a^n}{x^n}\right)$$

17.16.7. $$\int \frac{x^{n-1}dx}{x^n - a^n} = \frac{1}{n} \ln(x^n - a^n)$$

17.16.8. $$\int \frac{x^m dx}{(x^n - a^n)^r} = a^n \int \frac{x^{m-n}dx}{(x^n - a^n)^r} + \int \frac{x^{m-n}dx}{(x^n - a^n)^{r-1}}$$

17.16.9. $$\int \frac{dx}{x^m(x^n - a^n)^r} = \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^{m-n}(x^n - a^n)^r} - \frac{1}{a^n} \int \frac{dx}{x^m(x^n - a^n)^{r-1}}$$

17.16.10. $$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^n - a^n}} = \frac{2}{n\sqrt{a^n}} \cos^{-1} \sqrt{\frac{a^n}{x^n}}$$

17.16.11. $$\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m} + a^{2m}} = \frac{1}{ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{sen} \frac{(2k-1)p\pi}{2m} \tan^{-1}\left(\frac{x + a\cos[(2k-1)\pi/2m]}{a\operatorname{sen}[(2k-1)\pi/2m]}\right)$$
$$- \frac{1}{2ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m} \cos \frac{(2k-1)p\pi}{2m} \ln\left(x^2 + 2ax\cos\frac{(2k-1)\pi}{2m} + a^2\right)$$

donde $0 < p \leqq 2m$.

17.16.12. $$\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m} - a^{2m}} = \frac{1}{2ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m-1} \cos \frac{kp\pi}{m} \ln\left(x^2 - 2ax\cos\frac{k\pi}{m} + a^2\right)$$
$$- \frac{1}{ma^{2m-p}} \sum_{k=1}^{m-1} \operatorname{sen} \frac{kp\pi}{m} \tan^{-1}\left(\frac{x - a\cos(k\pi/m)}{a\operatorname{sen}(k\pi/m)}\right)$$
$$+ \frac{1}{2ma^{2m-p}} \{\ln(x-a) + (-1)^p \ln(x+a)\}$$

donde $0 < p \leqq 2m$.

17.16.13. $$\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m+1} + a^{2m+1}} = \frac{2(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{sen} \frac{2kp\pi}{2m+1} \tan^{-1}\left(\frac{x + a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\operatorname{sen}[2k\pi/(2m+1)]}\right)$$
$$- \frac{(-1)^{p-1}}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^{m} \cos \frac{2kp\pi}{2m+1} \ln\left(x^2 + 2ax\cos\frac{2k\pi}{2m+1} + a^2\right)$$
$$+ \frac{(-1)^{p-1} \ln(x+a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

donde $0 < p \leqq 2m + 1$.

17.16.14. $$\int \frac{x^{p-1}dx}{x^{2m+1} - a^{2m+1}} = \frac{-2}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{sen} \frac{2kp\pi}{2m+1} \tan^{-1}\left(\frac{x - a\cos[2k\pi/(2m+1)]}{a\operatorname{sen}[2k\pi/(2m+1)]}\right)$$
$$+ \frac{1}{(2m+1)a^{2m-p+1}} \sum_{k=1}^{m} \cos \frac{2kp\pi}{2m+1} \ln\left(x^2 - 2ax\cos\frac{2k\pi}{2m+1} + a^2\right)$$
$$+ \frac{\ln(x-a)}{(2m+1)a^{2m-p+1}}$$

donde $0 < p \leqq 2m + 1$.

(17) Integrales que contienen sen ax

17.17.1. $\int \operatorname{sen} ax\,dx = -\dfrac{\cos ax}{a}$

17.17.2. $\int x \operatorname{sen} ax\,dx = \dfrac{\operatorname{sen} ax}{a^2} - \dfrac{x\cos ax}{a}$

17.17.3. $\int x^2 \operatorname{sen} ax\,dx = \dfrac{2x}{a^2}\operatorname{sen} ax + \left(\dfrac{2}{a^3} - \dfrac{x^2}{a}\right)\cos ax$

17.17.4. $\int x^3 \operatorname{sen} ax\,dx = \left(\dfrac{3x^2}{a^2} - \dfrac{6}{a^4}\right)\operatorname{sen} ax + \left(\dfrac{6x}{a^3} - \dfrac{x^3}{a}\right)\cos ax$

17.17.5. $\int \dfrac{\operatorname{sen} ax}{x}dx = ax - \dfrac{(ax)^3}{3\cdot 3!} - \dfrac{(ax)^5}{5\cdot 5!} - \cdots$

17.17.6. $\int \dfrac{\operatorname{sen} ax}{x^2}dx = -\dfrac{\operatorname{sen} ax}{x} + a\int \dfrac{\cos ax}{x}dx$ (Vea la fórmula 17.18.5.)

17.17.7. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen} ax} = \dfrac{1}{\alpha}\ln(\csc ax - \cot ax) = \dfrac{1}{\alpha}\ln\tan\dfrac{ax}{2}$

17.17.8. $\int \dfrac{x\,dx}{\operatorname{sen} ax} = \dfrac{1}{a^2}\left\{ax + \dfrac{(ax)^3}{18} + \dfrac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \dfrac{2(2^{2n-1}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.17.9. $\int \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

17.17.10. $\int x \operatorname{sen}^2 ax\,dx = \dfrac{x^2}{4} - \dfrac{x\operatorname{sen} 2ax}{4a} - \dfrac{\cos 2ax}{8a^2}$

17.17.11. $\int \operatorname{sen}^3 ax\,dx = -\dfrac{\cos ax}{a} + \dfrac{\cos^3 ax}{3a}$

17.17.12. $\int \operatorname{sen}^4 ax\,dx = \dfrac{3x}{8} - \dfrac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \dfrac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$

17.17.13. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax} = -\dfrac{1}{a}\cot ax$

17.17.14. $\int \dfrac{dx}{\operatorname{sen}^3 ax} = -\dfrac{\cos ax}{2a\operatorname{sen}^2 ax} + \dfrac{1}{2a}\ln\tan\dfrac{ax}{2}$

17.17.15. $\int \operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx\,dx = \dfrac{\operatorname{sen}(p-q)x}{2(p-q)} - \dfrac{\operatorname{sen}(p+q)x}{2(p+q)}$ (Si $p = \pm q$, vea la fórmula 17.17.9.)

17.17.16. $\int \dfrac{dx}{1-\operatorname{sen} ax} = \dfrac{1}{a}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{ax}{2}\right)$

17.17.17. $\int \dfrac{x\,dx}{1-\operatorname{sen} ax} = \dfrac{x}{a}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{ax}{2}\right) + \dfrac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{ax}{2}\right)$

17.17.18. $\int \dfrac{dx}{1+\operatorname{sen} ax} = -\dfrac{1}{\alpha}\tan\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{ax}{2}\right)$

17.17.19. $$\int \frac{x\,dx}{1+\operatorname{sen} ax} = -\frac{x}{a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)+\frac{2}{a^2}\ln\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$$

17.17.20. $$\int \frac{dx}{(1-\operatorname{sen} ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)+\frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{ax}{2}\right)$$

17.17.21. $$\int \frac{dx}{(1+\operatorname{sen} ax)^2} = -\frac{1}{2a}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)-\frac{1}{6a}\tan^3\left(\frac{\pi}{4}-\frac{ax}{2}\right)$$

17.17.22. $$\int \frac{dx}{p+q\ \operatorname{sen} ax} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\dfrac{p\tan\frac{1}{2}ax+q}{\sqrt{p^2-q^2}} \\ \dfrac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{p\tan\frac{1}{2}ax+q-\sqrt{q^2-p^2}}{p\tan\frac{1}{2}ax+q+\sqrt{q^2-p^2}}\right) \end{cases}$$

(Si $p = \pm q$, vea las fórmulas 17.17.16 y 17.17.18.)

17.17.23. $$\int \frac{dx}{(p+q\operatorname{sen} ax)^2} = \frac{q\cos ax}{a(p^2-q^2)(p+q\operatorname{sen} ax)}+\frac{p}{p^2-q^2}\int\frac{dx}{p+q\operatorname{sen} ax}$$

(Si $p = \pm q$, vea las fórmulas 17.17.20 y 17.17.21.)

17.17.24. $$\int \frac{dx}{p^2+q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}}\tan^{-1}\frac{\sqrt{p^2+q^2}\tan ax}{p}$$

17.17.25. $$\int \frac{dx}{p^2-q^2\operatorname{sen}^2 ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{p^2-q^2}\tan ax}{p} \\ \dfrac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\dfrac{\sqrt{q^2-p^2}\tan ax+p}{\sqrt{q^2-p^2}\tan ax-p}\right) \end{cases}$$

17.17.26. $$\int x^m \operatorname{sen} ax\,dx = -\frac{x^m\cos ax}{a}+\frac{mx^{m-1}\operatorname{sen} ax}{a^2}-\frac{m(m-1)}{a^2}\int x^{m-2}\operatorname{sen} ax\,dx$$

17.17.27. $$\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^n}dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{(n-1)x^{n-1}}+\frac{a}{n-1}\int\frac{\cos ax}{x^{n-1}}dx$$ (Vea la fórmula 17.18.30.)

17.17.28. $$\int \operatorname{sen}^n ax\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{n-1} ax\cos ax}{an}+\frac{n-1}{n}\int\operatorname{sen}^{n-2} ax\,dx$$

17.17.29. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^n ax} = \frac{-\cos ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}$$

17.17.30. $$\int \frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^n ax} = \frac{-x\cos ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax}-\frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\operatorname{sen}^{n-2} ax}+\frac{n-2}{n-1}\int\frac{x\,dx}{\operatorname{sen}^{n-2} ax}$$

(18) Integrales que contienen cos *ax*

17.18.1. $$\int \cos ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a}$$

17.18.2. $$\int x\cos ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2}+\frac{x\operatorname{sen} ax}{a}$$

17.18.3. $\int x^2 \cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{sen} ax$

17.18.4. $\int x^3 \cos ax\,dx = \left(\frac{3x^2}{a^2} - \frac{6}{a^4}\right)\cos ax + \left(\frac{x^3}{a} - \frac{6x}{a^3}\right)\operatorname{sen} ax$

17.18.5. $\int \frac{\cos ax}{x}\,dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4\cdot 4!} - \frac{(ax)^6}{6\cdot 6!} + \cdots$

17.18.6. $\int \frac{\cos ax}{x^2}\,dx = -\frac{\cos ax}{x} - a\int \frac{\operatorname{sen} ax}{x}\,dx$ (Vea la fórmula 17.17.5.)

17.18.7. $\int \frac{dx}{\cos ax} = \frac{1}{a}\ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a}\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

17.18.8. $\int \frac{x\,dx}{\cos ax} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} + \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{E_n(ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$

17.18.9. $\int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a}$

17.18.10. $\int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$

17.18.11. $\int \cos^3 ax\,dx = \frac{\operatorname{sen} ax}{a} - \frac{\operatorname{sen}^3 ax}{3a}$

17.18.12. $\int \cos^4 ax\,dx = \frac{3x}{8} + \frac{\operatorname{sen} 2ax}{4a} + \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$

17.18.13. $\int \frac{dx}{\cos^2 ax} = \frac{\tan ax}{a}$

17.18.14. $\int \frac{dx}{\cos^3 ax} = \frac{\operatorname{sen} ax}{2a\cos^2 ax} + \frac{1}{2a}\ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right)$

17.18.15. $\int \cos ax \cos px\,dx = \frac{\operatorname{sen}(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\operatorname{sen}(a+p)x}{2(a+p)}$ (Si $a = \pm p$, vea la fórmula 17.18.9.)

17.18.16. $\int \frac{dx}{1-\cos ax} = -\frac{1}{a}\cot\frac{ax}{2}$

17.18.17. $\int \frac{x\,dx}{1-\cos ax} = -\frac{x}{a}\cot\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln \operatorname{sen}\frac{ax}{2}$

17.18.18. $\int \frac{dx}{1+\cos ax} = \frac{1}{a}\tan\frac{ax}{2}$

17.18.19. $\int \frac{x\,dx}{1+\cos ax} = \frac{x}{a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{2}{a^2}\ln\cos\frac{ax}{2}$

17.18.20. $\int \frac{dx}{(1-\cos ax)^2} = -\frac{1}{2a}\cot\frac{ax}{2} - \frac{1}{6a}\cot^3\frac{ax}{2}$

17.18.21. $\int \frac{dx}{(1+\cos ax)^2} = \frac{1}{2a}\tan\frac{ax}{2} + \frac{1}{6a}\tan^3\frac{ax}{2}$

17.18.22. $\int \frac{dx}{p+q\cos ax} = \begin{cases} \frac{2}{a\sqrt{p^2-q^2}}\tan^{-1}\sqrt{(p-q)/(p+q)}\tan\frac{1}{2}ax \\ \frac{1}{a\sqrt{q^2-p^2}}\ln\left(\frac{\tan\frac{1}{2}ax + \sqrt{(q+p)/(q-p)}}{\tan\frac{1}{2}ax - \sqrt{(q+p)/(q-p)}}\right) \end{cases}$ (Si $p = \pm q$, vea las fórmulas 17.18.16 y 17.18.18.)

17.18.23. $\int \frac{dx}{(p+q\cos ax)^2} = \frac{q \operatorname{sen} ax}{a(q^2-p^2)(p+q\cos ax)} - \frac{p}{q^2-p^2} \int \frac{dx}{p+q\cos ax}$ (Si $p = \pm q$ vea las fórmulas 17.18.19 y 17.18.20.)

17.18.24. $\int \frac{dx}{p^2+q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{ap\sqrt{p^2+q^2}} \tan^{-1} \frac{p\tan ax}{\sqrt{p^2+q^2}}$

17.18.25. $\int \frac{dx}{p^2-q^2\cos^2 ax} = \begin{cases} \frac{1}{ap\sqrt{p^2-q^2}} \tan^{-1} \frac{p\tan ax}{\sqrt{p^2-q^2}} \\ \frac{1}{2ap\sqrt{q^2-p^2}} \ln\left(\frac{p\tan ax - \sqrt{q^2-p^2}}{p\tan ax + \sqrt{q^2-p^2}}\right) \end{cases}$

17.18.26. $\int x^m \cos ax\, dx = \frac{x^m \operatorname{sen} ax}{a} + \frac{mx^{m-1}}{a^2}\cos ax - \frac{m(m-1)}{a^2} \int x^{m-2}\cos ax\, dx$

17.18.27. $\int \frac{\cos ax}{x^n} dx = -\frac{\cos ax}{(n-1)x^{n-1}} - \frac{a}{n-1} \int \frac{\operatorname{sen} ax}{x^{n-1}} dx$ (Vea la fórmula 17.17.27.)

17.18.28. $\int \cos^n ax\, dx = \frac{\operatorname{sen} ax \cos^{n-1} ax}{an} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} ax\, dx$

17.18.29. $\int \frac{dx}{\cos^n ax} = \frac{\operatorname{sen}\ ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} + \frac{n-2}{b-1} \int \frac{dx}{\cos^{n-2} ax}$

17.18.30. $\int \frac{x\, dx}{\cos^n ax} = \frac{x \operatorname{sen} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2(n-1)(n-2)\cos^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, dx}{\cos^{n-2} ax}$

(19) Integrales que contienen sen *ax* y cos *ax*

17.19.1. $\int \operatorname{sen} ax \cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{2a}$

17.19.2. $\int \operatorname{sen} px \cos qx\, dx = -\frac{\cos(p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\cos(p+q)x}{2(p+q)}$

17.19.3. $\int \operatorname{sen}^n ax \cos ax\, dx = \frac{\operatorname{sen}^{n+1} ax}{(n+1)a}$ (Si $n = -1$, vea la fórmula 17.21.1.)

17.19.4. $\int \cos^n ax \operatorname{sen} ax\, dx = -\frac{\cos^{n+1} ax}{(n+1)a}$ (Si $n = -1$, vea la fórmula 17.20.1.)

17.19.5. $\int \operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax\, dx = \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4ax}{32a}$

17.19.6. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan ax$

17.19.7. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos ax} = \frac{1}{a} \ln \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) - \frac{1}{a \operatorname{sen} ax}$

17.19.8. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \cos^2 ax} = \frac{1}{a} \ln \tan \frac{ax}{2} + \frac{1}{a\cos ax}$

17.19.9. $\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 ax \cos^2 ax} = -\frac{2\cot 2ax}{a}$

17.19.10. $$\int \frac{\operatorname{sen}^2 ax}{\cos ax}\,dx = -\frac{\operatorname{sen} ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

17.19.11. $$\int \frac{\cos^2 ax}{\operatorname{sen} ax}\,dx = \frac{\cos ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\tan\frac{ax}{2}$$

17.19.12. $$\int \frac{dx}{\cos ax(1\pm\operatorname{sen} ax)} = \mp\frac{1}{2a(1\pm\operatorname{sen} ax)} + \frac{1}{2a}\ln\tan\left(\frac{ax}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$$

17.19.13. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax(1\pm\cos ax)} = \pm\frac{1}{2a(1\pm\cos ax)} + \frac{1}{2a}\ln\tan\frac{ax}{2}$$

17.19.14. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ln\tan\left(\frac{ax}{2}\pm\frac{\pi}{8}\right)$$

17.19.15. $$\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \frac{x}{2} \mp \frac{1}{2a}\ln(\operatorname{sen} ax \pm \cos ax)$$

17.19.16. $$\int \frac{\cos ax\,dx}{\operatorname{sen} ax \pm \cos ax} = \pm\frac{x}{2} + \frac{1}{2a}\ln(\operatorname{sen} ax \pm \cos ax)$$

17.19.17. $$\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{p+q\cos ax} = -\frac{1}{aq}\ln(p+q\cos ax)$$

17.19.18. $$\int \frac{\cos ax\,dx}{p+q\operatorname{sen} ax} = \frac{1}{aq}\ln(p+q\operatorname{sen} ax)$$

17.19.19. $$\int \frac{\operatorname{sen} ax\,dx}{(p+q\cos ax)^n} = \frac{1}{aq(n-1)(p+q\cos ax)^{n-1}}$$

17.19.20. $$\int \frac{\cos ax\,dx}{(p+q\operatorname{sen} ax)^n} = \frac{-1}{aq(n-1)(p+q\operatorname{sen} ax)^{n-1}}$$

17.19.21. $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax + q\cos ax} = \frac{1}{a\sqrt{p^2+q^2}}\ln\tan\left(\frac{ax+\tan^{-1}(q/p)}{2}\right)$$

17.19.22. $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax + q\cos ax + r} = \begin{cases} \dfrac{2}{a\sqrt{r^2-p^2-q^2}}\tan^{-1}\left(\dfrac{p+(r-q)\tan(ax/2)}{\sqrt{r^2-p^2-q^2}}\right) \\ \dfrac{1}{a\sqrt{p^2+q^2-r^2}}\ln\left(\dfrac{p-\sqrt{p^2+q^2-r^2}+(r-q)\tan(ax/2)}{p+\sqrt{p^2+q^2-r^2}+(r-q)\tan(ax/2)}\right) \end{cases}$$

(Si $r = q$, vea la fórmula 17.19.23. Si $r^2 = p^2 + q^2$, vea la fórmula 17.19.24.)

17.19.23. $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax + q(1+\cos ax)} = \frac{1}{ap}\ln\left(q + p\tan\frac{ax}{2}\right)$$

17.19.24. $$\int \frac{dx}{p\operatorname{sen} ax + q\cos ax \pm \sqrt{p^2+q^2}} = \frac{-1}{a\sqrt{p^2+q^2}}\tan\left(\frac{\pi}{4} \mp \frac{ax+\tan^{-1}(q/p)}{2}\right)$$

17.19.25. $$\int \frac{dx}{p^2\operatorname{sen}^2 ax + q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{apq}\tan^{-1}\left(\frac{p\tan ax}{q}\right)$$

17.19.26. $$\int \frac{dx}{p^2\operatorname{sen}^2 ax - q^2\cos^2 ax} = \frac{1}{2apq}\ln\left(\frac{p\tan ax - q}{p\tan ax + q}\right)$$

17.19.27. $$\int \operatorname{sen}^m ax \cos^n ax\, dx = \begin{cases} -\dfrac{\operatorname{sen}^{m-1} ax \cos^{n+1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{m-1}{m+n} \displaystyle\int \operatorname{sen}^{m-2} ax \cos^n ax\, dx \\ \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} ax \cos^{n-1} ax}{a(m+n)} + \dfrac{n-1}{m+n} \displaystyle\int \operatorname{sen}^m ax \cos^{n-2} ax\, dx \end{cases}$$

17.19.28. $$\int \frac{\operatorname{sen}^m ax}{\cos^n ax} dx = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}^{m-1} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1} \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{m-2} ax}{\cos^{n-2} ax} dx \\ \dfrac{\operatorname{sen}^{m+1} ax}{a(n-1)\cos^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1} \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^m ax}{\cos^{n-2} ax} dx \\ \dfrac{-\operatorname{sen}^{m-1} ax}{a(m-n)\cos^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n} \displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}^{m-2} ax}{\cos^n ax} dx \end{cases}$$

17.19.29. $$\int \frac{\cos^m ax}{\operatorname{sen}^n ax} dx = \begin{cases} \dfrac{-\cos^{m-1} ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} - \dfrac{m-1}{n-1} \displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\operatorname{sen}^{n-2} ax} dx \\ \dfrac{-\cos^{m+1} ax}{a(n-1)\operatorname{sen}^{n-1} ax} - \dfrac{m-n+2}{n-1} \displaystyle\int \frac{\cos^m ax}{\operatorname{sen}^{n-2} ax} dx \\ \dfrac{\cos^{m-1} ax}{a(m-n)\operatorname{sen}^{n-1} ax} + \dfrac{m-1}{m-n} \displaystyle\int \frac{\cos^{m-2} ax}{\operatorname{sen}^n ax} dx \end{cases}$$

17.19.30. $$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m ax \cos^n ax} = \begin{cases} \dfrac{1}{a(n-1)\operatorname{sen}^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{n-1} \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^m ax \cos^{n-2} ax} \\ \dfrac{-1}{a(m-1)\operatorname{sen}^{m-1} ax \cos^{n-1} ax} + \dfrac{m+n-2}{m-1} \displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^{m-2} ax \cos^n ax} \end{cases}$$

(20) Integrales que contienen tan *ax*

17.20.1. $$\int \tan ax\, dx = -\frac{1}{a} \ln \cos ax = \frac{1}{a} \ln \sec ax$$

17.20.2. $$\int \tan^2 ax\, dx = \frac{\tan ax}{a} - x$$

17.20.3. $$\int \tan^3 ax\, dx = \frac{\tan^2 ax}{2a} + \frac{1}{a} \ln \cos ax$$

17.20.4. $$\int \tan^n ax \sec^2 ax\, dx = \frac{\tan^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

17.20.5. $$\int \frac{\sec^2 ax}{\tan ax} dx = \frac{1}{a} \ln \tan ax$$

17.20.6. $$\int \frac{dx}{\tan ax} = \frac{1}{a} \ln \operatorname{sen} ax$$

17.20.7. $$\int x \tan ax\, dx = \frac{1}{a^2} \left\{ \frac{(ax)^3}{3} + \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\}$$

17.20.8. $$\int \frac{\tan ax}{x} dx = ax + \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$$

17.20.9. $$\int x \tan^2 ax\, dx = \frac{x \tan ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \cos ax - \frac{x^2}{2}$$

17.20.10. $$\int \frac{dx}{p+q\tan ax} = \frac{px}{p^2+q^2} + \frac{q}{a(p^2+q^2)} \ln(q\,\text{sen}\,ax + p\cos ax)$$

17.20.11. $$\int \tan^n ax\,dx = \frac{\tan^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \tan^{n-2} ax\,dx$$

(21) Integrales que contienen cot *ax*

17.21.1. $$\int \cot ax\,dx = \frac{1}{a} \ln \text{sen}\,ax$$

17.21.2. $$\int \cot^2 ax\,dx = -\frac{\cot ax}{a} - x$$

17.21.3. $$\int \cot^3 ax\,dx = -\frac{\cot^2 ax}{2a} - \frac{1}{a} \ln \text{sen}\,ax$$

17.21.4. $$\int \cot^n ax \csc^2 ax\,dx = -\frac{\cot^{n+1} ax}{(n+1)a}$$

17.21.5. $$\int \frac{\csc^2 ax}{\cot ax}\,dx = -\frac{1}{a} \ln \cot ax$$

17.21.6. $$\int \frac{dx}{\cot ax} = -\frac{1}{a} \ln \cos ax$$

17.21.7. $$\int x \cot ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} - \cdots\right\}$$

17.21.8. $$\int \frac{\cot ax}{x}\,dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} - \cdots - \frac{2^{2n} B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} - \cdots$$

17.21.9. $$\int x \cot^2 ax\,dx = -\frac{x \cot ax}{a} + \frac{1}{a^2} \ln \text{sen}\,ax - \frac{x^2}{2}$$

17.21.10. $$\int \frac{dx}{p+q\cot ax} = \frac{px}{p^2+q^2} - \frac{q}{a(p^2+q^2)} \ln(q\,\text{sen}\,ax + q\cos ax)$$

17.21.11. $$\int \cot^n ax\,dx = -\frac{\cot^{n-1} ax}{(n-1)a} - \int \cot^{n-2} ax\,dx$$

(22) Integrales que contienen sec *ax*

17.22.1. $$\int \sec ax\,dx = \frac{1}{a} \ln(\sec ax + \tan ax) = \frac{1}{a} \ln \tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$$

17.22.2. $$\int \sec^2 ax\,dx = \frac{\tan ax}{a}$$

17.22.3. $$\int \sec^3 ax\,dx = \frac{\sec ax \tan ax}{2a} + \frac{1}{2a} \ln(\sec ax + \tan ax)$$

17.22.4. $\int \sec^n ax \tan ax\, dx = \dfrac{\sec^n ax}{na}$

17.22.5. $\int \dfrac{dx}{\sec ax} = \dfrac{\operatorname{sen} ax}{a}$

17.22.6. $\int x \sec ax\, dx = \dfrac{1}{a^2}\left\{\dfrac{(ax)^2}{2} + \dfrac{(ax)^4}{8} + \dfrac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \dfrac{E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$

17.22.7. $\int \dfrac{\sec ax}{x} dx = \ln x + \dfrac{(ax)^2}{4} + \dfrac{5(ax)^4}{96} + \dfrac{61(ax)^6}{4320} + \cdots + \dfrac{E_n (ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \cdots$

17.22.8. $\int x \sec^2 ax\, dx = \dfrac{x}{a}\tan ax + \dfrac{1}{a^2}\ln \cos ax$

17.22.9. $\int \dfrac{dx}{q + p\sec ax} = \dfrac{x}{q} - \dfrac{p}{q}\int \dfrac{dx}{p + q\cos ax}$

17.22.10. $\int \sec^n ax\, dx = \dfrac{\sec^{n-2} ax \tan ax}{a(n-1)} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} ax\, dx$

(23) Integrales que contienen csc *ax*

17.23.1. $\int \csc ax\, dx = \dfrac{1}{a}\ln(\csc ax - \cot ax) = \dfrac{1}{a}\ln \tan \dfrac{ax}{2}$

17.23.2. $\int \csc^2 ax\, dx = -\dfrac{\cot ax}{a}$

17.23.3. $\int \csc^3 ax\, dx = -\dfrac{\csc ax \cot ax}{2a} + \dfrac{1}{2a}\ln \tan \dfrac{ax}{2}$

17.23.4. $\int \csc^n ax \cot ax\, dx = -\dfrac{\csc^n ax}{na}$

17.23.5. $\int \dfrac{dx}{\csc ax} = -\dfrac{\cos ax}{a}$

17.23.6. $\int x \csc ax\, dx = \dfrac{1}{a^2}\left\{ax + \dfrac{(ax)^3}{18} + \dfrac{7(ax)^5}{1800} + \cdots + \dfrac{2(2^{2n-1}-1)B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.23.7. $\int \dfrac{\csc ax}{x} dx = -\dfrac{1}{ax} + \dfrac{ax}{6} + \dfrac{7(ax)^3}{1080} + \cdots + \dfrac{2(2^{2n-1}-1)B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.23.8. $\int x \csc^2 ax\, dx = -\dfrac{x \cot ax}{a} + \dfrac{1}{a^2}\ln \operatorname{sen} ax$

17.23.9. $\int \dfrac{dx}{q + p\csc ax} = \dfrac{x}{q} - \dfrac{p}{q}\int \dfrac{dx}{p + q\operatorname{sen} ax}$ (Vea la fórmula 17.17.22.)

17.23.10. $\int \csc^n ax\, dx = -\dfrac{\csc^{n-2} ax \cot ax}{a(n-1)} + \dfrac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} ax\, dx$

(24) Integrales que contienen funciones trigonométricas inversas

17.24.1. $\int \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\,\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2}$

17.24.2. $\int x\,\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4}$

17.24.3. $\int x^2 \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} + \frac{(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{9}$

17.24.4. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(x/a)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(x/a)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots$

17.24.5. $\int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x} - \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$

17.24.6. $\int\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x + 2\sqrt{a^2 - x^2}\,\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}$

17.24.7. $\int \cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\,\cos^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2}$

17.24.8. $\int x\,\cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right)\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4}$

17.24.9. $\int x^2 \cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\cos^{-1}\frac{x}{a} - \frac{(x^2 + 2a^2)\sqrt{a^2 - x^2}}{9}$

17.24.10. $\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\operatorname{sen}^{-1}(x/a)}{x}\,dx$ (Vea la fórmula 17.24.4.)

17.24.11. $\int \frac{\cos^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{\cos^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{a}\ln\left(\frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x}\right)$

17.24.12. $\int\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 dx = x\left(\cos^{-1}\frac{x}{a}\right)^2 - 2x - 2\sqrt{a^2 - x^2}\,\cos^{-1}\frac{x}{a}$

17.24.13. $\int \tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\,\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{2}\ln(x^2 + a^2)$

17.24.14. $\int x\,\tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2 + a^2)\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax}{2}$

17.24.15. $\int x^2 \tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax^2}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x^2 + a^2)$

17.24.16. $\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} - \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} - \frac{(x/a)^7}{7^2} + \cdots$

17.24.17. $\int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = -\frac{1}{x}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2 + a^2}{x^2}\right)$

17.24.18. $\int \cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(x^2+a^2)$

17.24.19. $\int x\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{1}{2}(x^2+a^2)\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax}{2}$

17.24.20. $\int x^2\cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^3}{3}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax^2}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x^2+a^2)$

17.24.21. $\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x - \int \frac{\tan^{-1}(x/a)}{x}\,dx$ (Vea la fórmula 17.24.16.)

17.24.22. $\int \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = \frac{\cot^{-1}(x/a)}{x} + \frac{1}{2a}\ln\left(\frac{x^2+a^2}{x^2}\right)$

17.24.23. $\int \sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\sec^{-1}\frac{x}{a} - a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x\sec^{-1}\frac{x}{a} + a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.24. $\int x\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\sec^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2}\sec^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.25. $\int x^2\sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3}\sec^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3}\sec^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.26. $\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}\ln x + \frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots$

17.24.27. $\int \frac{\sec^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} + \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & 0 < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ -\frac{\sec^{-1}(x/a)}{x} - \frac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & \frac{\pi}{2} < \sec^{-1}\frac{x}{a} < \pi \end{cases}$

17.24.28. $\int \csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\csc^{-1}\frac{x}{a} + a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ x\csc^{-1}\frac{x}{a} - a\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$

17.24.29. $\int x\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^2}{2}\csc^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^2}{2}\csc^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2} & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$

17.24.30. $\int x^2\csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \frac{x^3}{3}\csc^{-1}\frac{x}{a} + \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} + \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & 0 < \csc^{-1}\frac{x}{a} < \frac{\pi}{2} \\ \frac{x^3}{3}\csc^{-1}\frac{x}{a} - \frac{ax\sqrt{x^2-a^2}}{6} - \frac{a^3}{6}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}) & -\frac{\pi}{2} < \csc^{-1}\frac{x}{a} < 0 \end{cases}$

17.24.31. $$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x}\,dx = -\left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{2\cdot 3\cdot 3} + \frac{1\cdot 3(a/x)^5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5(a/x)^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 7} + \cdots\right)$$

17.24.32. $$\int \frac{\csc^{-1}(x/a)}{x^2}\,dx = \begin{cases} -\dfrac{\csc^{-1}(x/a)}{x} - \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & 0 < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ -\dfrac{\csc^{-1}(x/a)}{x} + \dfrac{\sqrt{x^2-a^2}}{ax} & -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

17.24.33. $$\int x^m \operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

17.24.34. $$\int x^m \cos^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cos^{-1}\frac{x}{a} + \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx$$

17.24.35. $$\int x^m \tan^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\tan^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx$$

17.24.36. $$\int x^m \cot^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\cot^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{x^2+a^2}\,dx$$

17.24.37. $$\int x^m \sec^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}\sec^{-1}(x/a)}{m+1} - \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & 0 < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^{m+1}\sec^{-1}(x/a)}{m+1} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & \dfrac{\pi}{2} < \sec^{-1}\dfrac{x}{a} < \pi \end{cases}$$

17.24.38. $$\int x^m \csc^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}\sec^{-1}(x/a)}{m+1} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & 0 < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x^{m+1}\csc^{-1}(x/a)}{m+1} - \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2-a^2}} & -\dfrac{\pi}{2} < \csc^{-1}\dfrac{x}{a} < 0 \end{cases}$$

(25) Integrales que contienen e^{ax}

17.25.1. $$\int e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}$$

17.25.2. $$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right)$$

17.25.3. $$\int x^2 e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$$

17.25.4. $$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx$$
$$= \frac{e^{ax}}{a}\left(x^n - \frac{nx^{n-1}}{a} + \frac{n(n-1)x^{n-2}}{a^2} - \cdots \frac{(-1)^n n!}{a^n}\right) \quad \text{si } n \text{ es un entero positivo}$$

17.25.5. $$\int \frac{e^{ax}}{x}\,dx = \ln x + \frac{ax}{1\cdot 1!} + \frac{(ax)^2}{2\cdot 2!} + \frac{(ax)^3}{3\cdot 3!} + \cdots$$

17.25.6. $$\int \frac{e^{ax}}{x^n}\,dx = \frac{-e^{ax}}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{e^{ax}}{x^{n-1}}\,dx$$

17.25.7. $\int \frac{dx}{p+qe^{ax}} = \frac{x}{p} - \frac{1}{ap}\ln(p+qe^{ax})$

17.25.8. $\int \frac{dx}{(p+qe^{ax})^2} = \frac{x}{p^2} + \frac{1}{ap(p+qe^{ax})} - \frac{1}{ap^2}\ln(p+qe^{ax})$

17.25.9. $\int \frac{dx}{pe^{ax}+qe^{-ax}} = \begin{cases} \frac{1}{a\sqrt{pq}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{p}{q}}e^{ax}\right) \\ \frac{1}{2a\sqrt{-pq}}\ln\left(\frac{e^{ax}-\sqrt{-q/p}}{e^{ax}+\sqrt{-q/p}}\right) \end{cases}$

17.25.10. $\int e^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2}$

17.25.11. $\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2}$

17.25.12. $\int xe^{ax}\operatorname{sen} bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\operatorname{sen} bx - b\cos bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\operatorname{sen} bx - 2ab\cos bx\}}{(a^2+b^2)^2}$

17.25.13. $\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}(a\cos bx + b\operatorname{sen} bx)}{a^2+b^2} - \frac{e^{ax}\{(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\operatorname{sen} bx\}}{(a^2+b^2)^2}$

17.25.14. $\int e^{ax}\ln x\,dx = \frac{e^{ax}\ln x}{a} - \frac{1}{a}\int \frac{e^{ax}}{x}dx$

17.25.15. $\int e^{ax}\operatorname{sen}^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\operatorname{sen}^{n-1} bx}{a^2+n^2b^2}(a\operatorname{sen} bx - nb\cos bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\operatorname{sen}^{n-2} bx\,dx$

17.25.16. $\int e^{ax}\cos^n bx\,dx = \frac{e^{ax}\cos^{n-1} bx}{a^2+n^2b^2}(a\cos bx + nb\operatorname{sen} bx) + \frac{n(n-1)b^2}{a^2+n^2b^2}\int e^{ax}\cos^{n-2} bx\,dx$

(26) Integrales que contienen $\ln x$

17.26.1. $\int \ln x\,dx = x\ln x - x$

17.26.2. $\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln x - \frac{1}{2}\right)$

17.26.3. $\int x^m \ln x\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\left(\ln x - \frac{1}{m+1}\right)$ (Si $m = -1$, vea la fórmula 17.26.4.)

17.26.4. $\int \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}\ln^2 x$

17.26.5. $\int \frac{\ln x}{x^2}dx = -\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x}$

17.26.6. $\int \ln^2 x\,dx = x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x$

17.26.7. $\int \frac{\ln^n x\,dx}{x} = \frac{\ln^{n+1} x}{n+1}$ (Si $n = -1$, vea la fórmula 17.26.8.)

17.26.8. $\int \frac{dx}{x\ln x} = \ln(\ln x)$

17.26.9. $\int \frac{dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{\ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \cdots$

17.26.10. $\int \frac{x^m dx}{\ln x} = \ln(\ln x) + (m+1)\ln x + \frac{(m+1)^2 \ln^2 x}{2 \cdot 2!} + \frac{(m+1)^3 \ln^3 x}{3 \cdot 3!} + \cdots$

17.26.11. $\int \ln^n x\, dx = x \ln^n x - n \int \ln^{n-1} x\, dx$

17.26.12. $\int x^m \ln^n x\, dx = \frac{x^{m+1} \ln^n x}{m+1} - \frac{n}{m+1} \int x^m \ln^{n-1} x dx$ (Si $m = -1$, vea la fórmula 17.26.7.)

17.26.13. $\int \ln(x^2 + a^2)\, dx = x \ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a \tan^{-1} \frac{x}{a}$

17.26.14. $\int \ln(x^2 - a^2)\, dx = x \ln(x^2 - a^2) - 2x + a \ln\left(\frac{x + a}{x - a}\right)$

17.26.15. $\int x^m \ln(x^2 \pm a^2)\, dx = \frac{x^{m+1} \ln(x^2 \pm a^2)}{m+1} - \frac{2}{m+1} \int \frac{x^{m+2}}{x^2 \pm a^2} dx$

(27) Integrales que contienen senh *ax*

17.27.1. $\int \operatorname{senh} ax\, dx = \frac{\cosh ax}{a}$

17.27.2. $\int x \operatorname{senh} ax\, dx = \frac{x \cosh ax}{a} - \frac{\operatorname{senh} ax}{a^2}$

17.27.3. $\int x^2 \operatorname{senh} ax\, dx = \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right) \cosh ax - \frac{2x}{a^2} \operatorname{senh} ax$

17.27.4. $\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x} dx = ax + \frac{(ax)^3}{3 \cdot 3!} + \frac{(ax)^5}{5 \cdot 5!} + \cdots$

17.27.5. $\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x^2} dx = -\frac{\operatorname{senh} ax}{x} + a \int \frac{\cosh ax}{x} dx$ (Vea la fórmula 17.28.4.)

17.27.6. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{1}{a} \ln \tanh \frac{ax}{2}$

17.27.7. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{1}{a^2} \left\{ ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} - \cdots + \frac{2(-1)^n (2^{2n} - 1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \right\}$

17.27.8. $\int \operatorname{senh}^2 ax\, dx = \frac{\operatorname{senh} ax \cosh ax}{2a} - \frac{x}{2}$

17.27.9. $\int x \operatorname{senh}^2 ax\, dx = \frac{x \operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2} - \frac{x^2}{4}$

17.27.10. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 ax} = -\frac{\coth ax}{a}$

17.27.11. $\int \operatorname{senh} ax \operatorname{senh} px\, dx = \frac{\operatorname{senh}(a+p)x}{2(a+p)} - \frac{\operatorname{senh}(a-p)x}{2(a-p)}$ (Para $a = \pm p$, vea la fórmula 17.27.8.)

17.27.12. $\int x^m \operatorname{senh} ax\, dx = \frac{x^m \cosh ax}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1} \cosh ax\, dx$ (Vea la fórmula 17.28.12.)

17.27.13. $\int \operatorname{senh}^n ax\, dx = \frac{\operatorname{senh}^{n-1} ax \cosh ax}{an} - \frac{n-1}{n} \int \operatorname{senh}^{n-2} ax\, dx$

17.27.14. $\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x^n} dx = \frac{-\operatorname{senh} ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\cosh ax}{x^{n-1}} dx$ (Vea la fórmula 17.28.14.)

17.27.15. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^n ax} = \frac{-\cosh ax}{a(n-1)\operatorname{senh}^{n-1} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{dx}{\operatorname{senh}^{n-2} ax}$

17.27.16. $\int \frac{x\, dx}{\operatorname{senh}^n ax} = \frac{-x \cosh ax}{a(n-1)\operatorname{senh}^{n-1} ax} - \frac{1}{a^2 (n-1)(n-2)\operatorname{senh}^{n-2} ax} - \frac{n-2}{n-1} \int \frac{x\, dx}{\operatorname{senh}^{n-2} ax}$

(28) Integrales que contienen cosh *ax*

17.28.1. $\int \cosh ax\, dx = \frac{\operatorname{senh} ax}{a}$

17.28.2. $\int x \cosh ax\, dx = \frac{x \operatorname{senh} ax}{a} - \frac{\cosh ax}{a^2}$

17.28.3. $\int x^2 \cosh ax\, dx = -\frac{2x \cosh ax}{a^2} + \left(\frac{x^2}{a} + \frac{2}{a^3}\right)\operatorname{senh} ax$

17.28.4. $\int \frac{\cosh ax}{x} dx = \ln x + \frac{(ax)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(ax)^4}{4 \cdot 4!} + \frac{(ax)^6}{6 \cdot 6!} + \cdots$

17.28.5. $\int \frac{\cosh ax}{x^2} dx = -\frac{\cosh ax}{x} + a\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x} dx$ (Vea la fórmula 17.27.4.)

17.28.6. $\int \frac{dx}{\cosh ax} = \frac{2}{a} \tan^{-1} e^{ax}$

17.28.7. $\int \frac{x\, dx}{\cosh ax} = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots + \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$

17.28.8. $\int \cosh^2 ax\, dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{senh} ax \cosh ax}{2a}$

17.28.9. $\int x\cosh^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\,\operatorname{senh} 2ax}{4a} - \frac{\cosh 2ax}{8a^2}$

17.28.10. $\int \frac{dx}{\cosh^2 ax} = \frac{\tanh ax}{a}$

17.28.11. $\int \cosh ax \cosh px\,dx = \frac{\operatorname{senh}(a-p)x}{2(a-p)} + \frac{\operatorname{senh}(a+p)x}{2(a+p)}$

17.28.12. $\int x^m \cosh ax\,dx = \frac{x^m \operatorname{senh} ax}{a} - \frac{m}{a}\int x^{m-1}\operatorname{senh} ax\,dx$ (Vea la fórmula 17.27.12.)

17.28.13. $\int \cosh^n ax\,dx = \frac{\cosh^{n-1} ax \operatorname{senh} ax}{an} + \frac{n-1}{n}\int \cosh^{n-2} ax\,dx$

17.28.14. $\int \frac{\cosh ax}{x^n}dx = \frac{-\cosh ax}{(n-1)x^{n-1}} + \frac{a}{n-1}\int \frac{\operatorname{senh} ax}{x^{n-1}}dx$ (Vea la fórmula 17.27.14.)

17.28.15. $\int \frac{dx}{\cosh^n ax} = \frac{\operatorname{senh} ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{dx}{\cosh^{n-2} ax}$

17.28.16. $\int \frac{x\,dx}{\cosh^n ax} = \frac{x\operatorname{senh} ax}{a(n-1)\cosh^{n-1} ax} + \frac{1}{(n-1)(n-2)a^2\cosh^{n-2} ax} + \frac{n-2}{n-1}\int \frac{x\,dx}{\cosh^{n-2} ax}$

(29) Integrales que contienen senh *ax* y cosh *ax*

17.29.1. $\int \operatorname{senh} ax \cosh ax\,dx = \frac{\operatorname{senh}^2 ax}{2a}$

17.29.2. $\int \operatorname{senh} px \cosh qx\,dx = \frac{\cosh(p+q)x}{2(p+q)} + \frac{\cosh(p-q)x}{2(p-q)}$

17.29.3. $\int \operatorname{senh}^2 ax \cosh^2 ax\,dx = \frac{\operatorname{senh} 4ax}{32a} - \frac{x}{8}$

17.29.4. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh} ax \cosh ax} = \frac{1}{a}\ln\tanh ax$

17.29.5. $\int \frac{dx}{\operatorname{senh}^2 ax \cosh^2 ax} = -\frac{2\coth 2ax}{a}$

17.29.6. $\int \frac{\operatorname{senh}^2 ax}{\cosh ax}dx = \frac{\operatorname{senh} ax}{a} - \frac{1}{a}\tan^{-1}\operatorname{senh} ax$

17.29.7. $\int \frac{\cosh^2 ax}{\operatorname{senh} ax}dx = \frac{\cosh ax}{a} + \frac{1}{a}\ln\tanh\frac{ax}{2}$

(30) Integrales que contienen tanh *ax*

17.30.1. $\int \tanh ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax$

17.30.2. $\int \tanh^2 ax\,dx = x - \frac{\tanh ax}{a}$

17.30.3. $\int \tanh^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\cosh ax - \frac{\tanh^2 ax}{2a}$

17.30.4. $\int x\tanh ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^3}{3} - \frac{(ax)^5}{15} + \frac{2(ax)^7}{105} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.30.5. $\int x\tanh^2 ax\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x\tanh ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\cosh ax$

17.30.6. $\int \frac{\tanh ax}{x}dx = ax - \frac{(ax)^3}{9} + \frac{2(ax)^5}{75} - \cdots \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}(2^{2n}-1)B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.30.7. $\int \frac{dx}{p+q\tanh ax} = \frac{px}{p^2-q^2} - \frac{q}{a(p^2-q^2)}\ln(q\operatorname{senh} ax + p\cosh ax)$

17.30.8. $\int \tanh^n ax\,dx = \frac{-\tanh^{n-1} ax}{a(a-1)} + \int \tanh^{n-2} ax\,dx$

(31) Integrales que contienen coth *ax*

17.31.1. $\int \coth ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{senh} ax$

17.31.2. $\int \coth^2 ax\,dx = x - \frac{\coth ax}{a}$

17.31.3. $\int \coth^3 ax\,dx = \frac{1}{a}\ln\operatorname{senh} ax - \frac{\coth^2 ax}{2a}$

17.31.4. $\int x\coth ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax + \frac{(ax)^3}{9} - \frac{(ax)^5}{225} + \cdots \frac{(-1)^{n-1}2^{2n}B_n(ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.31.5. $\int x\coth^2 ax\,dx = \frac{x^2}{2} - \frac{x\coth ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln\operatorname{senh} ax$

17.31.6. $\int \frac{\coth ax}{x}dx = -\frac{1}{ax} + \frac{ax}{3} - \frac{(ax)^3}{135} + \cdots \frac{(-1)^n 2^{2n}B_n(ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.31.7. $\int \frac{dx}{p+q\coth ax} = \frac{px}{p^2-q^2} - \frac{q}{a(p^2-q^2)}\ln(p\operatorname{senh} ax + q\cosh ax)$

17.31.8. $\int \coth^n ax\,dx = -\frac{\coth^{n-1} ax}{a(n-1)} + \int \coth^{n-2} ax\,dx$

(32) Integrales que contienen sech *ax*

17.32.1. $\int \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{2}{a}\tan^{-1} e^{ax}$

17.32.2. $\int \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{\tanh ax}{a}$

17.32.3. $\int \operatorname{sech}^3 ax\,dx = \frac{\operatorname{sech} ax \tanh ax}{2a} + \frac{1}{2a}\tan^{-1} \operatorname{senh} ax$

17.32.4. $\int x \operatorname{sech} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{\frac{(ax)^2}{2} - \frac{(ax)^4}{8} + \frac{5(ax)^6}{144} + \cdots \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n+2}}{(2n+2)(2n)!} + \cdots\right\}$

17.32.5. $\int x \operatorname{sech}^2 ax\,dx = \frac{x \tanh ax}{a} - \frac{1}{a^2}\ln \cosh ax$

17.32.6. $\int \frac{\operatorname{sech} ax}{x}dx = \ln x - \frac{(ax)^2}{4} + \frac{5(ax)^4}{96} - \frac{61(ax)^6}{4320} + \cdots \frac{(-1)^n E_n (ax)^{2n}}{2n(2n)!} + \cdots$

17.32.7. $\int \operatorname{sech}^n ax\,dx = \frac{\operatorname{sech}^{n-2} ax \tanh ax}{a(n-1)} + \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{sech}^{n-2} ax\,dx$

(33) Integrales que contienen csch *ax*

17.33.1. $\int \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a}\ln \tanh \frac{ax}{2}$

17.33.2. $\int \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{\coth ax}{a}$

17.33.3. $\int \operatorname{csch}^3 ax\,dx = -\frac{\operatorname{csch} ax \coth ax}{2a} - \frac{1}{2a}\ln \tanh \frac{ax}{2}$

17.33.4. $\int x \operatorname{csch} ax\,dx = \frac{1}{a^2}\left\{ax - \frac{(ax)^3}{18} + \frac{7(ax)^5}{1800} + \cdots - \frac{2(-1)^n (2^{2n-1}-1) B_n (ax)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots\right\}$

17.33.5. $\int x \operatorname{csch}^2 ax\,dx = -\frac{x \coth ax}{a} + \frac{1}{a^2}\ln \operatorname{senh} ax$

17.33.6. $\int \frac{\operatorname{csch} ax}{x}dx = -\frac{1}{ax} - \frac{ax}{6} + \frac{7(ax)^3}{1080} + \cdots \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1}-1) B_n (ax)^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!} + \cdots$

17.33.7. $\int \operatorname{csch}^n ax\,dx = \frac{-\operatorname{csch}^{n-2} ax \coth ax}{a(n-1)} - \frac{n-2}{n-1}\int \operatorname{csch}^{n-2} ax\,dx$

(34) Integrales que contienen funciones hiperbólicas inversas

17.34.1. $\int \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - \sqrt{x^2+a^2}$

17.34.2. $\int x\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+\frac{a^2}{4}\right)\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - x\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{4}$

17.34.3. $$\int \frac{\operatorname{senh}^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x}{a} - \dfrac{(x/a)^3}{2\cdot3\cdot3} + \dfrac{1\cdot3(x/a)^5}{2\cdot4\cdot5\cdot5} - \dfrac{1\cdot3\cdot5(x/a)^7}{2\cdot4\cdot6\cdot7\cdot7} + \cdots & |x| < a \\ \dfrac{\ln^2(2x/a)}{2} - \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} + \dfrac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} - \dfrac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} + \cdots & x > a \\ -\dfrac{\ln^2(-2x/a)}{2} + \dfrac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} - \dfrac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} + \dfrac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} - \cdots & x < -a \end{cases}$$

17.34.4. $$\int \cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\cosh^{-1}(x/a) - \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ x\cosh^{-1}(x/a) + \sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.5. $$\int x\cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) - \dfrac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \dfrac{1}{4}(2x^2-a^2)\cosh^{-1}(x/a) + \dfrac{1}{4}x\sqrt{x^2-a^2}, & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.6. $$\int \frac{\cosh^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \pm\left[\frac{1}{2}\ln^2(2x/a) + \frac{(a/x)^2}{2\cdot2\cdot2} + \frac{1\cdot3(a/x)^4}{2\cdot4\cdot4\cdot4} + \frac{1\cdot3\cdot5(a/x)^6}{2\cdot4\cdot6\cdot6\cdot6} + \cdots\right]$$
$+$ si $\cosh^{-1}(x/a) > 0$, $-$ si $\cosh^{-1}(x/a) < 0$

17.34.7. $\int \tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\tanh^{-1}\frac{x}{a} + \frac{a}{2}\ln(a^2-x^2)$

17.34.8. $\int x\tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}(x^2-a^2)\tanh^{-1}\frac{x}{a}$

17.34.9. $\int \frac{\tanh^{-1}(x/a)}{x}\,dx = \frac{x}{a} + \frac{(x/a)^3}{3^2} + \frac{(x/a)^5}{5^2} + \cdots$

17.34.10. $\int \coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\coth^{-1}x + \frac{a}{2}\ln(x^2-a^2)$

17.34.11. $\int x\coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{ax}{2} + \frac{1}{2}(x^2-a^2)\coth^{-1}\frac{x}{a}$

17.34.12. $\int \frac{\coth^{-1}(x/a)}{x}\,dx = -\left(\frac{a}{x} + \frac{(a/x)^3}{3^2} + \frac{(a/x)^5}{5^2} + \cdots\right)$

17.34.13. $$\int \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} x\operatorname{sech}^{-1}(x/a) + a\operatorname{sen}^{-1}(x/a), & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) > 0 \\ x\operatorname{sech}^{-1}(x/a) - a\operatorname{sen}^{-1}(x/a), & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.14. $\int \operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = x\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a} \pm a\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}$ $\quad(+ \text{ si } x > 0, - \text{ si } x < 0)$

17.34.15. $$\int x^m \operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{senh}^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx$$

17.34.16. $$\int x^m \cosh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx & \cosh^{-1}(x/a) > 0 \\ \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\cosh^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^{m+1}}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx & \cosh^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.17. $$\int x^m \tanh^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\tanh^{-1}\frac{x}{a} - \frac{a}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{a^2-x^2}\,dx$$

17.34.18. $$\int x^m \coth^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\coth^{-1}\frac{x}{a} - \frac{1}{m+1}\int \frac{x^{m+1}}{a^2-x^2}\,dx$$

17.34.19. $$\int x^m \operatorname{sech}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \begin{cases} \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} + \dfrac{a}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) > 0 \\ \dfrac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{sech}^{-1}\dfrac{x}{a} - \dfrac{1}{m+1}\displaystyle\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{a^2-x^2}} & \operatorname{sech}^{-1}(x/a) < 0 \end{cases}$$

17.34.20. $$\int x^m \operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a}\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\operatorname{csch}^{-1}\frac{x}{a} \pm \frac{a}{m+1}\int \frac{x^m\,dx}{\sqrt{x^2+a^2}} \qquad (+ \text{ si } x > 0, - \text{ si } x < 0)$$

18 INTEGRALES DEFINIDAS

Definición de la integral definida

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $a \leqq x \leqq b$. Dividamos el intervalo en n partes iguales de longitud $\Delta x = (b - a)/n$. Entonces la integral definida de la función $f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ se define como sigue:

18.1. $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\{f(a)\,\Delta x + f(a+\Delta x)\,\Delta x + f(a+2\Delta x)\,\Delta x + \cdots + f(a+(n-1)\,\Delta x)\,\Delta x\}$$

El límite ciertamente existirá si $f(x)$ es continua por segmentos.

Si $f(x) = \dfrac{d}{dx}g(x)$, por el teorema fundamental del cálculo integral, es posible evaluar la integral anterior mediante el uso del siguiente resultado.

18.2. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b \frac{d}{dx}g(x)\,dx = g(x)\Big|_a^b = g(b) - g(a)$$

Si el intervalo es infinito o si $f(x)$ tiene una singularidad en algún punto del intervalo, la integral definida se llama *integral impropia*. Tales integrales se definen mediante ciertas operaciones de límite adecuadas. Por ejemplo,

18.3. $$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)\,dx$$

18.4. $$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to\infty}}\int_a^b f(x)\,dx$$

18.5. $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)\,dx$$ si b es un punto singular.

18.6. $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,dx$$ si a es un punto singular.

Fórmulas generales para integrales definidas

18.7. $$\int_a^b \{f(x) \pm g(x) \pm h(x) \pm \cdots\}\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx \pm \int_a^b h(x)\,dx \pm \cdots$$

18.8. $$\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx$$ donde c es cualquier constante.

18.9. $$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

18.10. $$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

18.11. $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

18.12. $\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)\,f(c)$ donde c es un número entre a y b.

La fórmula anterior se conoce como el *teorema del valor medio* para integrales definidas y es válido siempre que $f(x)$ sea continua en $a \leqq x \leqq b$.

18.13. $\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = f(c)\int_a^b g(x)\,dx$ donde c es un número entre a y b

La fórmula anterior es una generalización de la fórmula 18.12 y es válida siempre que $f(x)$ y $g(x)$ sean continuas en $a \leqq x \leqq b$ y $g(x) \geqq 0$.

Regla de Leibnitz para derivar integrales

18.14. $$\frac{d}{d\alpha}\int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} F(x,\alpha)\,dx = \int_{\phi_1(\alpha)}^{\phi_2(\alpha)} \frac{\partial F}{d\alpha}\,dx + F(\phi_2,\alpha)\frac{d\phi_2}{d\alpha} - F(\phi_1,\alpha)\frac{d\phi_1}{d\alpha}$$

Fórmulas de aproximación para integrales definidas

En las siguientes fórmulas consideramos que el intervalo de $x = a$ a $x = b$ está dividido en n partes iguales por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n = b$ y llamamos $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \ldots, y_n = f(x_n)$, $h = (b-a)/n$.

Aproximación por rectángulos:

18.15. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx h(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

Aproximación por trapecios:

18.16. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \cdots + 2y_{n-1} + y_n)$$

Aproximación por parábolas (también llamada *aproximación de Simpson*) para *n* par:

18.17. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

Integrales definidas que contienen expresiones racionales o irracionales

18.18. $$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}$$

18.19. $$\int_0^\infty \frac{x^{p-1}\,dx}{1+x} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}, \quad 0 < p < 1$$

18.20. $$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{x^n + a^n} = \frac{\pi a^{m+1-n}}{n \operatorname{sen}[(m+1)\pi/n]}, \quad 0 < m+1 < n$$

18.21. $$\int_0^\infty \frac{x^m\,dx}{1 + 2x\cos\beta + x^2} = \frac{\pi}{\operatorname{sen} m\pi}\,\frac{\operatorname{sen} m\beta}{\operatorname{sen}\beta}$$

18.22. $$\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{\pi}{2}$$

18.23. $$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{\pi a^2}{4}$$

18.24. $\int_0^a x^m (a^n - x^n)^p \, dx = \dfrac{a^{m+1+np}\Gamma[(m+1)/n]\Gamma(p+1)}{n\Gamma[(m+1)/n + p + 1]}$

18.25. $\int_0^\infty \dfrac{x^m dx}{(x^n + a^n)^r} = \dfrac{(-1)^{r-1}\pi a^{m+1-nr}\Gamma[(m+1)/n]}{n \operatorname{sen}[(m+1)\pi/n](r-1)!\Gamma[(m+1)/n - r + 1]}, \quad 0 < m+1 < nr$

Integrales definidas que contienen funciones trigonométricas

Todas las literales se consideran positivas a menos que se indique lo contrario.

18.26. $\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx \, dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ enteros y } m \neq n \\ \pi/2 & m, n \text{ enteros y } m = n \end{cases}$

18.27. $\int_0^\pi \cos mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ enteros y } m \neq n \\ \pi/2 & m, n \text{ enteros y } m = n \end{cases}$

18.28. $\int_0^\pi \operatorname{sen} mx \cos nx \, dx = \begin{cases} 0 & m, n \text{ enteros y } m + n \text{ par} \\ 2m/(m^2 - n^2) & m, n \text{ enteros y } m + n \text{ impar} \end{cases}$

18.29. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^2 x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^2 x \, dx = \dfrac{\pi}{4}$

18.30. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x \, dx = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2m-1}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m} \dfrac{\pi}{2}, \quad m = 1, 2\ldots$

18.31. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m+1} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^{2m+1} x \, dx = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2m}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2m+1}, \quad m = 1, 2\ldots$

18.32. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2p-1} x \cos^{2q-1} x \, dx = \dfrac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{2\Gamma(p+q)}$

18.33. $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} px}{x} dx = \begin{cases} \pi/2 & p > 0 \\ 0 & p = 0 \\ -\pi/2 & p < 0 \end{cases}$

18.34. $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} px \cos qx}{x} dx = \begin{cases} 0 & p > q > 0 \\ \pi/2 & 0 < p < q \\ \pi/4 & p = q > 0 \end{cases}$

18.35. $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen} px \operatorname{sen} qx}{x^2} dx = \begin{cases} \pi p/2 & 0 < p \leqq q \\ \pi q/2 & p \geqq q > 0 \end{cases}$

18.36. $\int_0^\infty \dfrac{\operatorname{sen}^2 px}{x^2} dx = \dfrac{\pi p}{2}$

18.37. $\int_0^\infty \dfrac{1 - \cos px}{x^2} dx = \dfrac{\pi p}{2}$

18.38. $\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x}\,dx = \ln\frac{q}{p}$

18.39. $\int_0^\infty \frac{\cos px - \cos qx}{x^2}\,dx = \frac{\pi(q-p)}{2}$

18.40. $\int_0^\infty \frac{\cos mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2a}e^{-ma}$

18.41. $\int_0^\infty \frac{x\,\operatorname{sen} mx}{x^2+a^2}\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-ma}$

18.42. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-ma})$

18.43. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\operatorname{sen} x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

18.44. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}$

18.45. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\cos^{-1}(b/a)}{\sqrt{a^2-b^2}}$

18.46. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\operatorname{sen} x)^2} = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+b\,\cos x)^2} = \frac{2\pi a}{(a^2-b^2)^{3/2}}$

18.47. $\int_0^{2\pi} \frac{dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{2\pi}{1-a^2}, \quad 0<a<1$

18.48. $\int_0^{\pi} \frac{x\operatorname{sen} x\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \begin{cases} (\pi/a)\ln(1+a), & |a|<1 \\ \pi\ln(1+1/a), & |a|>1 \end{cases}$

18.49. $\int_0^{\pi} \frac{\cos mx\,dx}{1-2a\cos x+a^2} = \frac{\pi a^m}{1-a^2}, \quad a^2<1, \quad m=0,\,1,\,2\ldots$

18.50. $\int_0^\infty \operatorname{sen} ax^2\,dx = \int_0^\infty \cos ax^2\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}$

18.51. $\int_0^\infty \operatorname{sen} ax^n\,dx = \frac{1}{na^{1/n}}\Gamma(1/n)\operatorname{sen}\frac{\pi}{2n}, \quad n>1$

18.52. $\int_0^\infty \cos ax^n\,dx = \frac{1}{na^{1/n}}\Gamma(1/n)\cos\frac{\pi}{2n}, \quad n>1$

18.53. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

18.54. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\operatorname{sen}(p\pi/2)}, \quad 0<p<1$

18.55. $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x^p}\,dx = \frac{\pi}{2\Gamma(p)\cos(p\pi/2)}, \quad 0<p<1$

18.56. $\int_0^\infty \operatorname{sen} ax^2\cos 2bx\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a} - \operatorname{sen}\frac{b^2}{a}\right)$

18.57. $\int_0^\infty \cos ax^2 \cos 2bx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2a}}\left(\cos\frac{b^2}{a} + \operatorname{sen}\frac{b^2}{a}\right)$

18.58. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^3 x}{x^3} dx = \frac{3\pi}{8}$

18.59. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}^4 x}{x^4} dx = \frac{\pi}{3}$

18.60. $\int_0^\infty \frac{\tan x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$

18.61. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\tan^m x} = \frac{\pi}{4}$

18.62. $\int_0^{\pi/2} \frac{x}{\operatorname{sen} x} dx = 2\left\{\frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} - \cdots\right\}$

18.63. $\int_0^1 \frac{\tan^{-1} x}{x} dx = \frac{1}{1^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$

18.64. $\int_0^1 \frac{\operatorname{sen}^{-1} x}{x} dx = \frac{\pi}{2}\ln 2$

18.65. $\int_0^1 \frac{1-\cos x}{x} dx - \int_1^\infty \frac{\cos x}{x} dx = \gamma$

18.66. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x^2} - \cos x\right)\frac{dx}{x} = \gamma$

18.67. $\int_0^\infty \frac{\tan^{-1} px - \tan^{-1} qx}{x} dx = \frac{\pi}{2}\ln\frac{p}{q}$

Integrales definidas que contienen funciones exponenciales

En algunas integrales se utiliza la constante de Euler $\gamma = 0.5772156\ldots$ (vea la fórmula 1.3, página 3).

18.68. $\int_0^\infty e^{-ax}\cos bx\, dx = \frac{a}{a^2+b^2}$

18.69. $\int_0^\infty e^{-ax}\operatorname{sen} bx\, dx = \frac{b}{a^2+b^2}$

18.70. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}\operatorname{sen} bx}{x} dx = \tan^{-1}\frac{b}{a}$

18.71. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx = \ln\frac{b}{a}$

18.72. $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}$

18.73. $\int_0^\infty e^{-ax^2}\cos bx\, dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-b^2/4a}$

18.74. $\int_0^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}\operatorname{erfc}\frac{b}{2\sqrt{a}}$

donde $\operatorname{erfc}(p) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_p^\infty e^{-x^2}\,dx$

18.75. $\int_{-\infty}^\infty e^{-(ax^2+bx+c)}\,dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{(b^2-4ac)/4a}$

18.76. $\int_0^\infty x^n e^{-ax}\,dx = \frac{\Gamma(n+1)}{a^{n+1}}$

18.77. $\int_0^\infty x^m e^{-ax^2}\,dx = \frac{\Gamma[(m+1)/2]}{2a^{(m+1)/2}}$

18.78. $\int_0^\infty e^{-(ax^2+b/x^2)}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ab}}$

18.79. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x-1} = \frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{6}$

18.80. $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x-1}dx = \Gamma(n)\left(\frac{1}{1^n}+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\cdots\right)$

Para n par, esta suma puede calcularse en términos de los números de Bernoulli (vea las páginas 142 y 143).

18.81. $\int_0^\infty \frac{x\,dx}{e^x+1} = \frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots = \frac{\pi^2}{12}$

18.82. $\int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^x+1}dx = \Gamma(n)\left(\frac{1}{1^n}-\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}-\cdots\right)$

La serie puede calcularse para algunos valores enteros positivos de n. (Vea la fórmula 23.10.)

18.83. $\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen} mx}{e^{2\pi x}-1}dx = \frac{1}{4}\coth\frac{m}{2}-\frac{1}{2m}$

18.84. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{1+x}-e^{-x}\right)\frac{dx}{x} = \gamma$

18.85. $\int_0^\infty \frac{e^{-x^2}-e^{-x}}{x}dx = \frac{1}{2}\gamma$

18.86. $\int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{e^{-x}}{x}\right)dx = \gamma$

18.87. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x\sec px}dx = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{b^2+p^2}{a^2+p^2}\right)$

18.88. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x\csc px}dx = \tan^{-1}\frac{b}{p}-\tan^{-1}\frac{a}{p}$

18.89. $\int_0^\infty \frac{e^{-ax}(1-\cos x)}{x^2}dx = \cot^{-1}a-\frac{a}{2}\ln(a^2+1)$

Integrales definidas que contienen funciones logarítmicas

18.90. $\int_0^1 x^m (\ln x)^n \, dx = \dfrac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}} \qquad m > -1, \quad n = 0, 1, 2\ldots$

Si $n \neq 0, 1, 2\ldots$, reemplace $n!$ por $\Gamma(n+1)$.

18.91. $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1+x} dx = -\dfrac{\pi^2}{12}$

18.92. $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1-x} dx = -\dfrac{\pi^2}{6}$

18.93. $\int_0^1 \dfrac{\ln(1+x)}{x} dx = \dfrac{\pi^2}{12}$

18.94. $\int_0^1 \dfrac{\ln(1-x)}{x} dx = -\dfrac{\pi^2}{6}$

18.95. $\int_0^1 \ln x \ln(1+x)\, dx = 2 - 2\ln 2 - \dfrac{\pi^2}{12}$

18.96. $\int_0^1 \ln x \ln(1-x)\, dx = 2 - \dfrac{\pi^2}{6}$

18.97. $\int_0^\infty \dfrac{x^{p-1} \ln x}{1+x} dx = -\pi^2 \csc p\pi \cot p\pi \qquad 0 < p < 1$

18.98. $\int_0^1 \dfrac{x^m - x^n}{\ln x} dx = \ln \dfrac{m+1}{n+1}$

18.99. $\int_0^\infty e^{-x} \ln x \, dx = -\gamma$

18.100. $\int_0^\infty e^{-x^2} \ln x \, dx = -\dfrac{\sqrt{\pi}}{4}(\gamma + 2\ln 2)$

18.101. $\int_0^\infty \ln\left(\dfrac{e^x + 1}{e^x - 1}\right) dx = \dfrac{\pi^2}{4}$

18.102. $\int_0^{\pi/2} \ln \operatorname{sen} x \, dx = \int_0^{\pi/2} \ln \cos x \, dx = -\dfrac{\pi}{2} \ln 2$

18.103. $\int_0^{\pi/2} (\ln \operatorname{sen} x)^2 \, dx = \int_0^{\pi/2} (\ln \cos x)^2 \, dx = \dfrac{\pi}{2}(\ln 2)^2 + \dfrac{\pi^3}{24}$

18.104. $\int_0^\pi x \ln \operatorname{sen} x \, dx = -\dfrac{\pi^2}{2} \ln 2$

18.105. $\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \ln \operatorname{sen} x \, dx = \ln 2 - 1$

18.106. $\int_0^{2\pi} \ln(a + b \operatorname{sen} x) \, dx = \int_0^{2\pi} \ln(a + b \cos x) \, dx = 2\pi \ln(a + \sqrt{a^2 - b^2})$

18.107. $\int_0^\pi \ln(a + b \cos x) \, dx = \pi \ln\left(\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2}\right)$

18.108. $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2ab\cos x + b^2)\,dx = \begin{cases} 2\pi \ln a, & a \geqq b > 0 \\ 2\pi \ln b, & b \geqq a > 0 \end{cases}$

18.109. $\int_0^{\pi/4} \ln(1+\tan x)\,dx = \frac{\pi}{8}\ln 2$

18.110. $\int_0^{\pi/2} \sec x \ln\left(\frac{1+b\cos x}{1+a\cos x}\right)dx = \frac{1}{2}\{(\cos^{-1} a)^2 - (\cos^{-1} b)^2\}$

18.111. $\int_0^{a} \ln\left(2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)dx = -\left(\frac{\operatorname{sen} a}{1^2} + \frac{\operatorname{sen} 2a}{2^2} + \frac{\operatorname{sen} 3a}{3^2} + \cdots\right)$

(Vea también la fórmula 18.102.)

Integrales definidas que contienen funciones hiperbólicas

18.112. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sen} ax}{\operatorname{senh} bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\tanh\frac{a\pi}{2b}$

18.113. $\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{\cosh bx}\,dx = \frac{\pi}{2b}\operatorname{sech}\frac{a\pi}{2b}$

18.114. $\int_0^{\infty} \frac{x\,dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{\pi^2}{4a^2}$

18.115. $\int_0^{\infty} \frac{x^n dx}{\operatorname{senh} ax} = \frac{2^{n+1}-1}{2^n a^{n+1}}\Gamma(n+1)\left\{\frac{1}{1^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{3^{n+1}} + \cdots\right\}$

Si n es un entero positivo impar, la serie se pueden sumar.

18.116. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh} ax}{e^{bx}+1}\,dx = \frac{\pi}{2b}\csc\frac{a\pi}{b} - \frac{1}{2a}$

18.117. $\int_0^{\infty} \frac{\operatorname{senh} ax}{e^{bx}-1}\,dx = \frac{1}{2a} - \frac{\pi}{2b}\cot\frac{a\pi}{b}$

Integrales definidas diversas

18.118. $\int_0^{\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,dx = \{f(0) - f(\infty)\}\ln\frac{b}{a}$

Esta última se llama la *integral de Frullani*. Es válida siempre que $f'(x)$ sea continua y $\int_0^{\infty} \frac{f(x)-f(\infty)}{x}\,dx$ converja.

18.119. $\int_0^{1} \frac{dx}{x^x} = \frac{1}{1^1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \cdots$

18.120. $\int_{-a}^{a} (a+x)^{m-1}(a-x)^{n-1}\,dx = (2a)^{m+n-1}\frac{\Gamma(m)\,\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

19 ECUACIONES DIFERENCIALES BÁSICAS Y SOLUCIONES

ECUACIÓN DIFERENCIAL	SOLUCIÓN
19.1. Separación de variables	$$\int \frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx + \int \frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy = c$$
$f_1(x)\, g_1(y)\, dx + f_2(x)\, g_2(y)\, dy = 0$	
19.2. Ecuación lineal de primer orden	$$ye^{\int P\,dx} = \int Qe^{\int P dx}\,dx + c$$
$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = Q(x)$$	
19.3. Ecuación de Bernoulli	$$v\,e^{(1-n)\int P dx} = (1-n)\int Qe^{(1-n)\int P dx}\,dx + c$$ donde $v = y^{1-n}$. Si $n = 1$, la solución es $$\ln y = \int (Q - P)\,dx + c$$
$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n$$	
19.4. Ecuación exacta	$$\int M\,\partial x + \int \left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M\,\partial x\right) dy = c$$ donde ∂x indica que se integra respecto a x manteniendo a y constante.
$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ donde $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$.	
19.5. Ecuación homogénea	$$\ln x = \int \frac{dv}{F(v) - v} + c$$ donde $v = y/x$. Si $F(v) = v$, la solución es $y = cx$.
$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right)$$	

19.6.

$$y\,F(xy)\,dx + x\,G(xy)\,dy = 0$$

$$\ln x = \int \frac{G(\upsilon)\,d\upsilon}{\upsilon\{G(\upsilon) - F(\upsilon)\}} + c$$

donde $\upsilon = xy$. Si $G(\upsilon) = F(\upsilon)$, la solución es $xy = c$.

19.7. Ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0$$

a, b son constantes reales.

Sean m_1, m_2 las raíces de $m^2 + am + b = 0$. Entonces hay tres casos:

Caso 1. m_1, m_2 reales y distintas:

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2 e^{m_2 x}$$

Caso 2. m_1, m_2 reales e iguales:

$$y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2 x\, e^{m_1 x}$$

Caso 3. $m_1 = p + qi, \quad m_2 = p - qi$:

$$y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \operatorname{sen} qx)$$

donde $p = -a/2$, $q = \sqrt{b - a^2/4}$.

19.8. Ecuación lineal no homogénea de segundo orden

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = R(x)$$

a, b son constantes reales.

Hay tres casos que corresponden a los del punto 19.7.

Caso 1.

$$y = c_1 e^{m_1 x} + c_2\, e^{m_2 x} + \frac{e^{m_1 x}}{m_1 - m_2}\int e^{-m_1 x} R(x)\,dx + \frac{e^{m_2 x}}{m_2 - m_1}\int e^{-m_2 x} R(x)\,dx$$

Caso 2.

$$y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2 x\, e^{m_1 x} + x e^{m_1 x}\int e^{-m_1 x} R(x)\,dx - e^{m_1 x}\int x e^{-m_1 x} R(x)\,dx$$

Caso 3.

$$y = e^{px}(c_1 \cos qx + c_2 \operatorname{sen} qx) + \frac{e^{px}\operatorname{sen} qx}{q}\int e^{-px} R(x)\cos qx\,dx - \frac{e^{px}\cos qx}{q}\int e^{-px} R(x)\operatorname{sen} qx\,dx$$

19.9. Ecuación de Euler o Cauchy	Si $x = e^t$, la ecuación se transforma en
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + ax\frac{dy}{dx} + by = S(x)$	$\frac{d^2y}{dt^2} + (a-1)\frac{dy}{dt} + by = S(e^t)$ que puede resolverse como lo indican los puntos 19.7 y 19.8.
19.10. Ecuación de Bessel	
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (\lambda^2x^2 - n^2)y = 0$	$y = c_1J_n(\lambda x) + c_2Y_n(\lambda x)$ Vea las fórmulas 27.1 a 27.15.
19.11. Ecuación de Bessel transformada	
$x^2\frac{d^2y}{dx^2} + (2p+1)x\frac{dy}{dx} + (a^2x^{2r} + \beta^2)y = 0$	$y = x^{-p}\left\{c_1J_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right) + c_2\,Y_{q/r}\left(\frac{\alpha}{r}x^r\right)\right\}$ donde $q = \sqrt{p^2 - \beta^2}$.
19.12. Ecuación de Legendre	
$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)\,y = 0$	$y = c_1P_n(x) + c_2\,Q_n(x)$ Vea las fórmulas 28.1 a 28.48.

20 FÓRMULAS DE ANÁLISIS VECTORIAL

Vectores y escalares

Algunas cantidades físicas como la temperatura, el volumen y la rapidez, que pueden definirse por completo mediante un número real, son llamadas *escalares*.

Por otro lado, la fuerza, la velocidad y el momento requieren, además de un número real, una dirección para ser definidos. A este tipo de cantidades se les llama *vectores*. Un vector se representa mediante una flecha o un segmento de línea que indica la dirección. La magnitud del vector corresponde a la longitud de la flecha usando las unidades de medición apropiadas.

Notación para vectores

Un vector se denota por una letra en negritas, por ejemplo $\mathbf{A}$ (figura 20-1). La magnitud se denota por $|\mathbf{A}|$ **o** A. El punto extremo de la flecha es llamado *origen* mientras que la cabeza de la flecha se llama *punto terminal*.

Definiciones fundamentales

1. **Igualdad de vectores**. Dos vectores son iguales si tienen la misma magnitud y dirección. Por lo tanto $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ (figura 20-1).
2. **Multiplicación de un vector por un escalar**. Si m es cualquier número real (escalar), entonces $m\mathbf{A}$ es un vector cuya magnitud es $|m|$ veces la magnitud de $\mathbf{A}$ y cuya dirección es la misma o es la opuesta, dependiendo si $m > 0$ o $m < 0$. Si $m = 0$, entonces $m\mathbf{A} = \mathbf{0}$ se llama *cero*, *vector cero* o *vector nulo*.

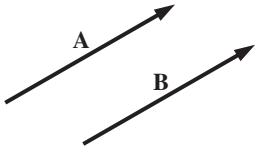
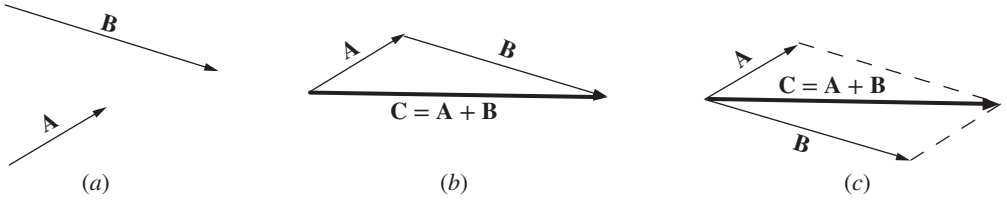


Fig. 20-1

3. **Suma de vectores**. La suma o resultante de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ es un vector $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ que se construye al situar el punto inicial de $\mathbf{B}$ en el punto terminal de $\mathbf{A}$ y al unir el punto inicial de $\mathbf{A}$ con el punto terminal de $\mathbf{B}$, como en la figura 20-2b. Esta definición es equivalente a la regla del paralelogramo para la suma de vectores como se indica en la figura 20-2c. El vector $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ se define como $\mathbf{A} + (-\mathbf{B})$.



(*a*) (*b*) (*c*)

Fig. 20-2

Es evidente que esta definición puede aplicarse para sumas de más de dos vectores. Así, por ejemplo, la figura 20-3 muestra cómo obtener la suma $\mathbf{E}$ de los vectores $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ y $\mathbf{D}$.

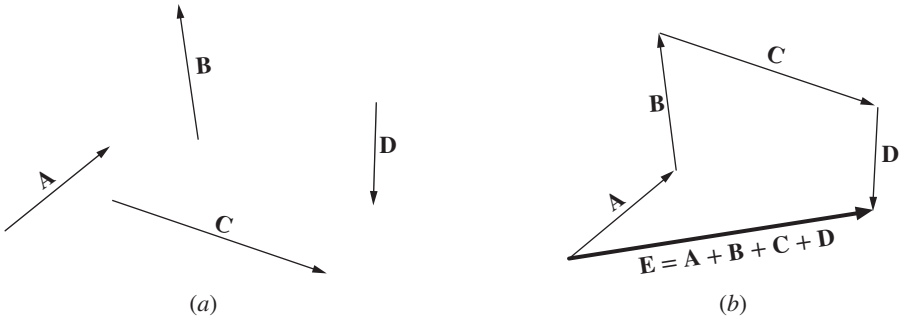


Fig. 20-3

4. Vectores unitarios. Un *vector unitario* es un vector con magnitud igual a 1. Si **A** es un vector, entonces un vector unitario en la dirección de **A** es $\mathbf{a} = \mathbf{A}/A$ donde $A > 0$.

Leyes del algebra vectorial

Si **A**, **B**, **C** son vectores y m, n son escalares, entonces:

20.1. $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$ Ley conmutativa de la suma

20.2. $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$ Ley distributiva de la suma

20.3. $m(n\mathbf{A}) = (mn)\mathbf{A} = n(m\mathbf{A})$ Ley asociativa de la multiplicación por escalar

20.4. $(m + n)\mathbf{A} = m\mathbf{A} + n\mathbf{A}$ Ley distributiva

20.5. $m(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = m\mathbf{A} + m\mathbf{B}$ Ley distributiva

Componentes de un vector

Un vector **A** se puede representar con su punto inicial en el origen de un sistema de coordenadas rectangulares. Si **i**, **j**, **k** representan vectores unitarios en las direcciones positivas de los ejes x, y, z, entonces:

20.6. $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$

donde $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$, $A_3\mathbf{k}$ son los *vectores componentes* de **A** en las direcciones **i, j, k** y A_1, A_2, A_3 son las *componentes* de **A**.

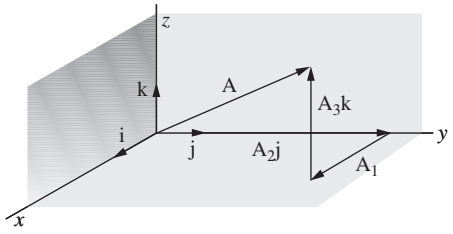


Fig. 20-4

Producto punto o producto escalar

20.7. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB\cos\theta \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$

donde θ es el ángulo entre **A** y **B**.

Resultados fundamentales:

20.8. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ Ley conmutativa

20.9. $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ Ley distributiva

20.10. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$

donde $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$.

Producto cruz o producto vectorial

20.11. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = AB \operatorname{sen} \theta\, \mathbf{u} \qquad 0 \leqq \theta \leqq \pi$

donde θ es el ángulo entre **A** y **B**, **u** es un vector unitario perpendicular al plano de **A** y **B** tal que **A**, **B**, **u** forman un *sistema de mano derecha* (es decir, un tornillo de rosca derecha rotado un ángulo menor a 180° de **A** a **B** avanzará en la dirección de **u** como se muestra en la figura 20-5).

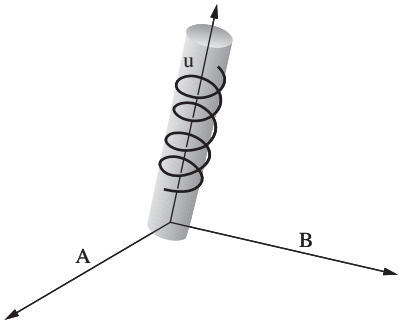


Fig. 20-5

Resultados fundamentales:

20.12.
$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$
$$= (A_2B_3 - A_3B_2)\mathbf{i} + (A_3B_1 - A_1B_3)\mathbf{j} + (A_1B_2 - A_2B_1)\mathbf{k}$$

20.13. $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -(\mathbf{B} \times \mathbf{A})$

20.14. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$

20.15. $|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|$ = área del paralelogramo con lados **A** y **B**

Fórmulas que contienen a los productos punto y cruz

20.16.
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = A_1B_2C_3 + A_2B_3C_1 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1 - A_2B_1C_3 - A_1B_3C_2$$

20.17. $|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ = volumen del paralelepípedo con lados **A, B, C**

20.18. $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})$

20.19. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{B}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

20.20. $(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{D}) - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{D})(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})$

20.21.
$$(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \times (\mathbf{C} \times \mathbf{D}) = \mathbf{C}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{D}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})\}$$
$$= \mathbf{B}\{\mathbf{A} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\} - \mathbf{A}\{\mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{D})\}$$

Derivadas de vectores

La derivada de una función vectorial $\mathbf{A}(u) = A_1(u)\mathbf{i} + A_2(u)\mathbf{j} + A_3(u)\mathbf{k}$ de la variable escalar u está dada por:

20.22. $$\frac{d\mathbf{A}}{du} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\mathbf{A}(u+\Delta u) - \mathbf{A}(u)}{\Delta u} = \frac{dA_1}{du}\mathbf{i} + \frac{dA_2}{du}\mathbf{j} + \frac{dA_3}{du}\mathbf{k}$$

Las derivadas parciales de una función vectorial $\mathbf{A}(x, y, z)$ se definen de una manera similar. Suponemos que todas las derivadas existen a menos que se especifique lo contrario.

Fórmulas que contienen derivadas

20.23. $$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}) = \mathbf{A} \bullet \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \bullet \mathbf{B}$$

20.24. $$\frac{d}{du}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{du} + \frac{d\mathbf{A}}{du} \times \mathbf{B}$$

20.25. $$\frac{d}{du}\{\mathbf{A} \bullet (\mathbf{B} \times C)\} = \frac{d\mathbf{A}}{du} \bullet (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) + \mathbf{A} \bullet \left(\frac{d\mathbf{B}}{du} \times \mathbf{C}\right) + \mathbf{A} \bullet \left(\mathbf{B} \times \frac{d\mathbf{C}}{du}\right)$$

20.26. $$\mathbf{A} \bullet \frac{d\mathbf{A}}{du} = A\frac{d\mathbf{A}}{du}$$

20.27. $$\mathbf{A} \bullet \frac{d\mathbf{A}}{du} = 0 \qquad \text{si } |\mathbf{A}| \text{ es constante}$$

El operador del o nabla

El operador *del* o *nabla* se define como sigue:

20.28. $$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

En los siguientes resultados suponemos que $U = U(x, y, z)$, $V = V(x, y, z)$, $\mathbf{A} = \mathbf{A}(x, y, z)$ y $\mathbf{B} = \mathbf{B}(x, y, z)$ tienen derivadas parciales.

El gradiente

20.29. Gradiente de U = grad $U = \nabla U = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}$

La divergencia

20.30. Divergencia de $\mathbf{A}$ = div $\mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A} = \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \bullet (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

El rotacional

20.31. Rotacional de $\mathbf{A} = \text{rot}\,\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A}$

$$= \left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k})$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

El laplaciano

20.32. Laplaciano de $U = \nabla^2 U = \nabla \cdot (\nabla U) = \dfrac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 U}{\partial z^2}$

20.33. Laplaciano de $\mathbf{A} = \nabla^2 \mathbf{A} = \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial z^2}$

El operador biarmónico

20.34. Operador biarmónico en $U = \nabla^4 U = \nabla^2(\nabla^2 U)$

$$= \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} + \frac{\partial^4 U}{\partial z^4} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial y^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial y^2 \partial z^2} + 2\frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial z^2}$$

Fórmulas que contienen a ∇

20.35. $\nabla(U + V) = \nabla U + \nabla V$

20.36. $\nabla \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \cdot \mathbf{B}$

20.37. $\nabla \times (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \mathbf{B}$

20.38. $\nabla \cdot (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \cdot \mathbf{A} + U(\nabla \cdot \mathbf{A})$

20.39. $\nabla \times (U\mathbf{A}) = (\nabla U) \times \mathbf{A} + U(\nabla \times \mathbf{A})$

20.40. $\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$

20.41. $\nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\,\mathbf{A} - \mathbf{B}(\nabla \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A}(\nabla \cdot \mathbf{B})$

20.42. $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B})$

20.43. $\nabla \times (\nabla U) = 0$, esto es, el rotacional del gradiente de U es cero.

20.44. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$, esto es, la divergencia del rotacional de $\mathbf{A}$ es cero.

20.45. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

Integrales que contienen vectores

Si $\mathbf{A}(u) = \dfrac{d}{du}\mathbf{B}(u)$ entonces la *integral indefinida* de A(u) es como sigue:

20.46. $\displaystyle\int \mathbf{A}(u)\,du = \mathbf{B}(u) + \mathbf{c}, \qquad c = \text{vector constante}$

La *integral definida* de $\mathbf{A}(u)$ de $u = a$ a $u = b$ en este caso está dada por

20.47. $\displaystyle\int_a^b \mathbf{A}(u)\,du = \mathbf{B}(b) - \mathbf{B}(a)$

La integral definida puede definirse como en la fórmula 18.1.

Integrales de línea

Considere una curva C en el espacio tridimensional, la cual une a los puntos $P_1(a_1, a_2, a_3)$ y $P_2(b_1, b_2, b_3)$ como en la figura 20-6. Divídase la curva en n partes por los puntos intermedios $(x_1, y_1, z_1), \ldots, (x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$. Entonces la *integral de línea* de un vector $\mathbf{A}(x, y, z)$ a lo largo de la curva C se define como sigue:

20.48. $\displaystyle\int_C \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n} \mathbf{A}(x_p, y_p, z_p)\bullet\nabla\mathbf{r}_p$

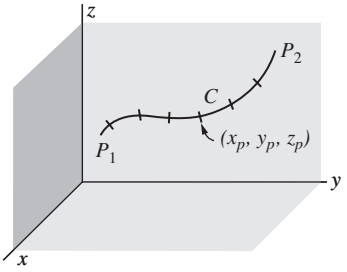


Fig. 20-6

donde $\Delta\mathbf{r}_p = \Delta x_p\mathbf{i} + \Delta y_p\mathbf{j} + \Delta z_p\mathbf{k}, \Delta x_p = x_{p+1} - x_p, \Delta y_p = y_{p+1} - y_p$, $\Delta z_p = z_{p+1} - z_p$ y además se supone que la mayor entre las magnitudes $|\Delta\mathbf{r}_p|$ se aproxima a cero conforme $n \to \infty$. El resultado 20.48 es una generalización de la integral definida ordinaria (vea la fórmula 18.1).

La integral de línea 20.48 también puede escribirse como sigue:

20.49. $\displaystyle\int_C \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_C (A_1\,dx + A_2\,dy + A_3\,dz)$

usando $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ y $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$.

Propiedades de las integrales de línea

20.50. $\displaystyle\int_{p_1}^{p_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = -\int_{P_2}^{P_1} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$

20.51. $\displaystyle\int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_3} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} + \int_{P_3}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$

Independencia de la trayectoria

En general, el valor de una integral de línea depende de la trayectoria particular C que une a los puntos P_1 y P_2 en una región $\mathscr{R}$. Sin embargo, en el caso de $\mathbf{A} = \nabla\phi$ o $\nabla \times \mathbf{A} = 0$ donde ϕ y sus derivadas parciales son continuas en $\mathscr{R}$, la integral de línea $\int_C \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r}$ es independiente de la trayectoria. En este caso,

20.52. $\displaystyle\int_C \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \int_{P_1}^{P_2} \mathbf{A}\bullet d\mathbf{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1)$

donde $\phi(P_1)$ y $\phi(P_2)$ denotan los valores de ϕ en P_1 y P_2, respectivamente. En particular si C es una curva cerrada,

20.53. $\int_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = 0$

donde el círculo en la integral se usa para enfatizar que la curva C es cerrada.

Integrales múltiples

Sea $F(x, y)$ una función definida en una región $\mathscr{R}$ del plano xy como se ilustra en la figura 20-7. Subdivídase la región en n partes por medio de las líneas paralelas a los ejes x y y como se indica en la figura. Sea $\Delta A_p = \Delta x_p \, \Delta y_p$ el área de una de estas partes. Entonces la integral de $F(x, y)$ sobre $\mathscr{R}$ se define como:

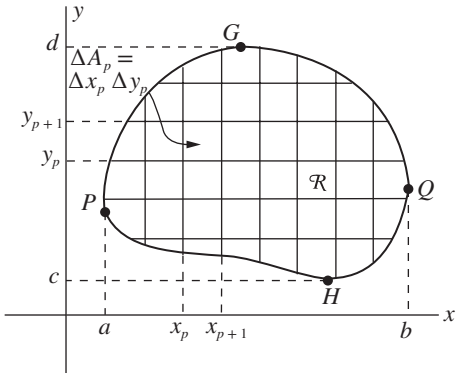


Fig. 20-7

20.54. $\int_{\mathscr{R}} F(x,y)\,dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} F(x_p, y_p)\Delta A_p$

siempre que el límite exista.

En tal caso, la integral también se puede escribir como sigue:

20.55. $$\int_{x=a}^{b} \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy\,dx = \int_{x=a}^{b} \left\{ \int_{y=f_1(x)}^{f_2(x)} F(x,y)\,dy \right\} dx$$

donde $y = f_1(x)$ y $y = f_2(x)$ son las ecuaciones de las curvas PHQ y PGQ, respectivamente y a y b son las coordenadas x de los puntos P y Q. Esta integral también puede escribirse como

20.56. $$\int_{y=c}^{d} \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx\,dy = \int_{y=c}^{d} \left\{ \int_{x=g_1(y)}^{g_2(y)} F(x,y)\,dx \right\} dy$$

donde $x = g_1(y)$ y $x = g_2(y)$ son las ecuaciones de las curvas HPG y HQG, respectivamente y c y d son las coordenadas de los puntos H y G.

Las anteriores son llamadas *integrales dobles* o *integrales de área*. Estos conceptos pueden extenderse de forma similar a *integrales triples* o *integrales de volumen*, o incluso a *integrales múltiples* en más de tres dimensiones.

Integrales de superficie

Subdivídase la superficie S (vea la figura 20-8) en n elementos de área ΔS_p, $p = 1, 2, \ldots, n$. Sea $\mathbf{A}(x_p, y_p, z_p) = \mathbf{A}_p$ donde (x_p, y_p, z_p) es un punto P en ΔS_p. Sea $\mathbf{N}_p$ un vector unitario normal a ΔS_p en P. Entonces la integral de superficie de la componente normal de $\mathbf{A}$ sobre S se define como sigue:

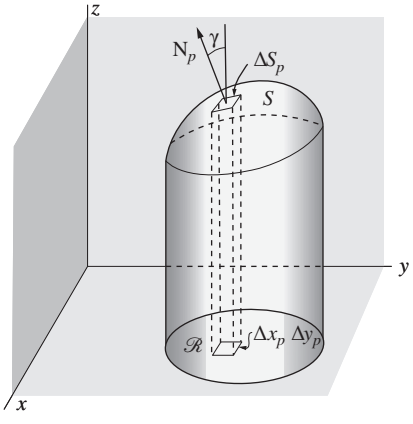


Fig. 20-8

20.57. $\int_S \mathbf{A} \bullet \mathbf{N}\, dS = \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{n} \mathbf{A}_p \bullet \mathbf{N}_p \Delta S_p$

Relación entre integrales de superficie e integrales dobles

Si $\mathscr{R}$ es la proyección de S en el plano xy, entonces (vea la figura 20-8).

20.58. $$\int_S \mathbf{A} \bullet \mathbf{N}\, dS = \int_{\mathscr{R}} \int \mathbf{A} \bullet \mathbf{N} \frac{dx\, dy}{|\mathbf{N} \bullet \mathbf{k}|}$$

Teorema de la divergencia

Si S es una superficie cerrada que delimita una región de volumen V, y se supone que $\mathbf{N}$ es la normal positiva (que apunta hacia el exterior) y $d\mathbf{S} = \mathbf{N}\, dS$, entonces (vea la figura 20-9)

20.59. $$\int_V \nabla \bullet \mathbf{A}\, dV = \int_S \mathbf{A} \bullet d\mathbf{S}$$

Este resultado también se conoce como *teorema de Gauss* o *teorema de Green*.

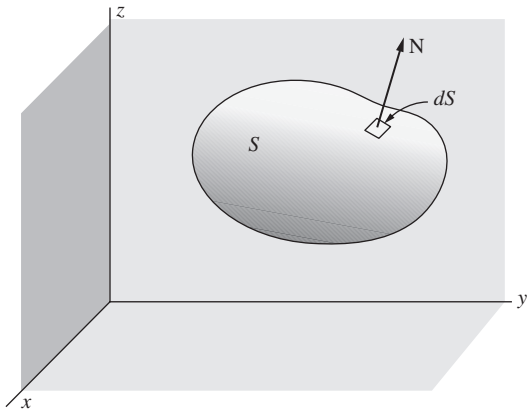


Fig. 20-9

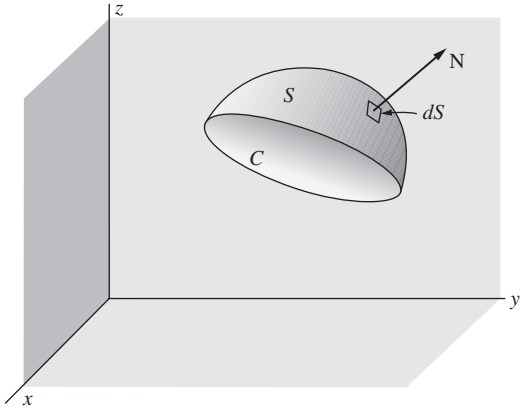


Fig. 20-10

Teorema de Stokes

Sea S una superficie abierta de dos caras cuyo contorno es una curva cerrada C que no se corta a sí misma (curva simple y cerrada) como en la figura 20-10. Entonces

20.60. $$\oint_C \mathbf{A} \bullet d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{A}) \bullet d\mathbf{S}$$

donde el círculo en la integral enfatiza que C es una curva cerrada.

Teorema de Green en el plano

20.61. $$\oint_C (P\, dx + Q\, dy) = \int_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx\, dy$$

donde R es el área delimitada por la curva simple y cerrada. Este resultado es un caso especial del teorema de la divergencia o del teorema de Stokes.

Primera identidad de Green

20.62. $$\int_V \{(\phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi)\} dV = \int (\phi \nabla \psi) \cdot d\mathbf{S}$$

donde ϕ y ψ son funciones escalares.

Segunda identidad de Green

20.63. $$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi)\, dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot d\mathbf{S}$$

Teoremas varios sobre integrales

20.64. $$\int_V \nabla \times \mathbf{A}\, dV = \int_S d\boldsymbol{S} \times \mathbf{A}$$

20.65. $$\int_C \phi d\mathbf{r} = \int_S d\mathbf{S} \times \nabla \phi$$

Coordenadas curvilíneas

Un punto P en el espacio (vea la figura 20-11) puede localizarse mediante coordenadas rectangulares $(x, y, z,)$ o coordenadas curvilíneas (u_1, u_2, u_3). Las ecuaciones para transformar de un conjunto de coordenadas al otro están dadas por

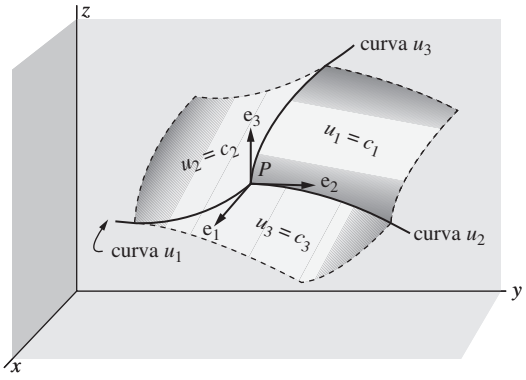


Fig. 20-11

20.66.
$$x = x(u_1, u_2, u_3)$$
$$y = y(u_1, u_2, u_3)$$
$$z = z(u_1, u_2, u_3)$$

Si u_2 y u_3 son constantes, entonces al variar u_1, el vector de posición $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ de P describe una curva llamada curva coordenada de u_1. De manera análoga se pueden definir las curvas coordenadas de u_2 y u_3 que pasan por P. Los vectores $\partial\mathbf{r}/\partial u_1$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_2$, $\partial\mathbf{r}/\partial u_3$ representan vectores tangentes a las curvas coordenadas u_1, u_2, u_3. Si $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ representan vectores unitarios tangentes a estas curvas, tenemos que

20.67. $$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} = h_1 \mathbf{e}_1, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} = h_2 \mathbf{e}_2, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} = h_3 \mathbf{e}_3$$

donde

20.68. $$h_1 = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1}\right|, \quad h_2 = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2}\right|, \quad h_3 = \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3}\right|$$

son llamados *factores de escala*. Si $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ son perpendiculares entre sí, el sistema coordenado curvilíneo se dice *ortogonal*.

Fórmulas que contienen coordenadas curvilíneas ortogonales

20.69. $$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} du_3 = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$$

20.70. $$ds^2 = d\mathbf{r} \bullet d\mathbf{r} = h_1^2 du_1^2 + h_2^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2$$

donde ds es el elemento de longitud.

Si dV es el elemento de volumen, entonces

20.71. $$dV = |(h_1 \mathbf{e}_1 du_1) \bullet (h_2 \mathbf{e}_2 du_2) \times (h_3 \mathbf{e}_3 du_3)| = h_1 h_2 h_3 \, du_1 du_2 du_3$$

$$= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_1} \bullet \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_2} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u_3} \right| du_1 \, du_2 \, du_3 = \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 \, du_2 \, du_3$$

donde

20.72. $$\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u_1, u_2, u_3)} = \begin{vmatrix} \partial x/\partial u_1 & \partial x/\partial u_2 & \partial x/\partial u_3 \\ \partial y/\partial u_1 & \partial y/\partial u_2 & \partial y/\partial u_3 \\ \partial z/\partial u_1 & \partial z/\partial u_2 & \partial z/du_3 \end{vmatrix}$$

que suele escribirse como $J(x, y, z; u_1, u_2, u_3)$, y se llama el *jacobiano* de la transformación.

Transformación de integrales múltiples

La fórmula 20.72 puede emplearse para transformar integrales múltiples del sistema de coordenadas rectangulares al sistema de coordenadas curvilíneas. Por ejemplo, tenemos

20.73. $$\iiint_{\mathscr{R}} F(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_{\mathscr{R}'} G(u_1, u_2, u_3) \left| \frac{\partial (x, y, z)}{\partial (u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 \, du_2 \, du_3$$

donde $\mathscr{R}'$ es la región en la cual queda mapeado $\mathscr{R}$ después de la transformación y $G(u_1, u_2, u_3)$ es el valor que corresponde a $F(x, y, z)$ después de la transformación.

Gradiente, divergencia, rotacional y laplaciano

A continuación, Φ representa una función escalar y $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$ una función vectorial cuyas coordenadas curvilíneas ortogonales son u_1, u_2, u_3.

20.74. Gradiente de Φ = grad $\Phi = \nabla \Phi = \dfrac{\mathbf{e}_1}{h_1} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_1} + \dfrac{\mathbf{e}_2}{h_2} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_2} + \dfrac{\mathbf{e}_3}{h_3} \dfrac{\partial \Phi}{\partial u_3}$

20.75. Divergencia de $\mathbf{A}$ = div $\mathbf{A} = \nabla \bullet \mathbf{A} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\dfrac{\partial}{\partial u_1} (h_2 h_3 A_1) + \dfrac{\partial}{\partial u_2} (h_3 h_1 A_2) + \dfrac{\partial}{\partial u_3} (h_1 h_2 A_3) \right]$

20.76. Rotacional de $\mathbf{A}$ = rot $\mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A} = \dfrac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \mathbf{e}_1 & h_2 \mathbf{e}_2 & h_3 \mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ h_1 A_1 & h_2 A_2 & h_3 A_3 \end{vmatrix}$

$$= \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_2} (h_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial u_3} (h_2 A_2) \right] \mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_1 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial u_3} (h_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial u_1} (h_3 A_3) \right] \mathbf{e}_2$$

$$+ \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial}{\partial u_1} (h_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial u_2} (h_1 A_1) \right] \mathbf{e}_3$$

20.77. Laplaciano de $\Phi = \nabla^2\Phi = \dfrac{1}{h_1h_2h_3}\left[\dfrac{\partial}{\partial u_1}\left(\dfrac{h_2h_3}{h_1}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_1}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u_2}\left(\dfrac{h_3h_1}{h_2}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_2}\right)+\dfrac{\partial}{\partial u_3}\left(\dfrac{h_1h_2}{h_3}\dfrac{\partial\Phi}{\partial u_3}\right)\right]$

Observe que el operador biarmónico $\nabla^4\Phi = \nabla^2(\nabla^2\Phi)$ puede obtenerse de la fórmula 20.77.

Sistemas coordenados ortogonales notables

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (vea la figura 20-12)

20.78. $x = r\cos\theta, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta, \qquad z = z$

20.79. $h_1^2 = 1, \quad h_2^2 = r^2, \quad h_3^2 = 1$

20.80. $\nabla^2\Phi = \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\Phi}{\partial r} = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2} + \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

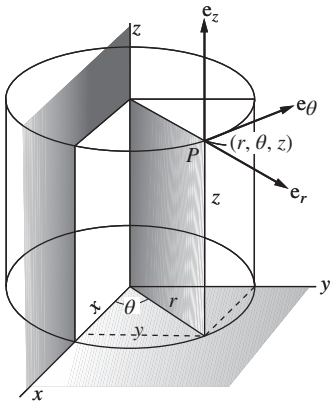


Fig. 20-12 Coordenadas cilíndricas.

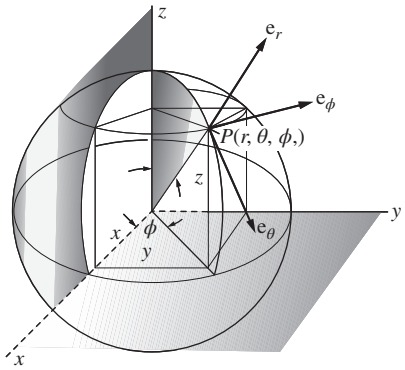


Fig. 20-13 Coordenadas esféricas.

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) (vea la figura 20-13)

20.81. $x = r\,\text{sen}\,\theta\cos\phi, \qquad y = r\,\text{sen}\,\theta\,\text{sen}\,\phi, \qquad z = r\cos\theta$

20.82. $h_1^2 = 1, \qquad h_2^2 = r^2, \qquad h_3^2 = r^2\text{sen}^2\theta$

20.83. $\nabla^2\Phi = \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial\Phi}{dr}\right)+\dfrac{1}{r^2\,\text{sen}\,\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}\left(\text{sen}\,\theta\dfrac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\dfrac{1}{r^2\,\text{sen}^2\theta}\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$

Coordenadas cilíndricas parabólicas (u, v, z)

20.84. $x = \frac{1}{2}(u^2 - v^2), \qquad y = uv, \qquad z = z$

20.85. $h_1^2 = h_2^2 = u^2 + v^2, \qquad h_3^2 = 1$

20.86. $\nabla^2\Phi = \dfrac{1}{u^2+v^2}\left(\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right)+\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$

Las trazas de las superficies coordenadas en el plano se muestran en la figura 20-14. Estas trazas son parábolas homofocales con un eje común.

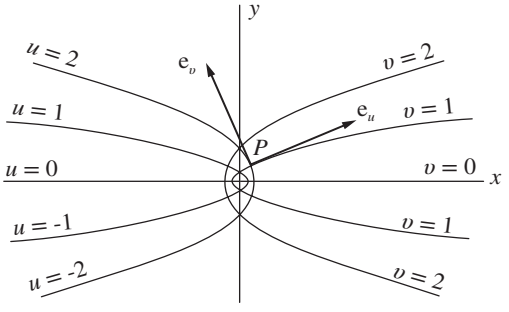


Fig. 20-14

Coordenadas paraboloidales (u, v, ϕ)

20.87. $x = uv\cos\phi, \quad y = uv\,\text{sen}\,\phi, \quad z = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$

donde $u \geqq 0, \quad v \geqq 0, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

20.88. $h_1^2 = h_2^2 = u^2 + v^2, \quad h_3^2 = u^2 v^2$

20.89. $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{u(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right) + \frac{1}{v(u^2+v^2)}\frac{\partial}{\partial v}\left(v\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right) + \frac{1}{u^2v^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Al girar las parábolas de la figura 20-14 alrededor del eje x, el cual se renombra como eje z, se obtienen dos sistemas de superficies coordenadas.

Coordenadas cilíndricas elípticas (u, v, z)

20.90. $x = a\cosh u\cos v, \quad y = a\,\text{senh}\,u\,\text{sen}\,v, \quad z = z$

donde $u \geqq 0, \quad 0 \leqq v < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty$

20.91. $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v), \quad h_3^2 = 1$

20.92. $$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\text{senh}^2 u + \text{sen}^2 v)}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}\right) + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}$$

Las trazas de las superficies coordenadas en el plano xy se muestran en la figura 20-15. Estas trazas son elipses e hipérbolas homofocales.

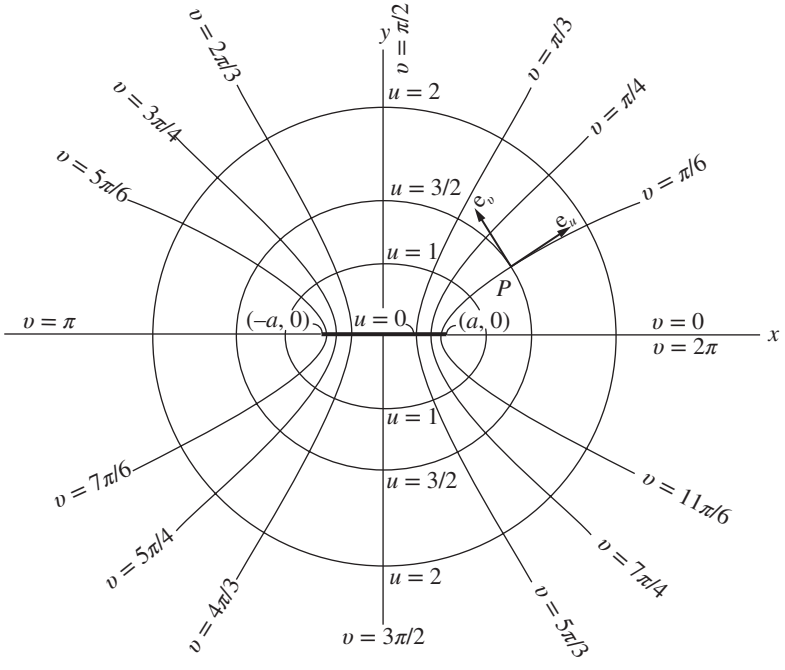


Fig. 20-15 Coordenadas cilíndricas elípticas.

Coordenadas esferoidales alargadas (ξ, η, ϕ)

20.93. $x = a\,\text{senh}\,\xi\,\text{sen}\,\eta\,\cos\phi, \quad y = a\,\text{senh}\,\xi\,\text{sen}\,\eta\,\text{sen}\,\phi, \quad z = a\cosh\xi\cos\eta$

donde $\xi \geqq 0, \quad 0 \leqq \eta \leqq \pi, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

20.94. $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\text{senh}^2\,\xi\,\text{sen}^2\,\eta), \quad h_3^2 = a^2\,\text{senh}^2\,\xi\,\text{sen}^2\,\eta$

20.95.
$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta)\,\text{senh}\,\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\text{senh}\,\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{a^2(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta)\,\text{sen}\,\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\text{sen}\,\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\,\text{senh}^2\,\xi\,\text{sen}^2\,\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Al girar las curvas de la figura 20-15 alrededor del eje x, el cual se renombra como eje z, se obtienen dos sistemas de superficies coordenadas. El tercer sistema de superficies coordenadas se forma mediante los planos que pasan por dicho eje.

Coordenadas esferoidales achatadas (ξ, η, ϕ)

20.96. $x = a\cosh\xi\cos\eta\,\cos\phi, \quad y = a\cosh\xi\cos\eta\,\text{sen}\,\phi, \quad z = a\,\text{senh}\,\xi\,\text{sen}\,\eta$

donde: $\xi \geqq 0, \quad -\pi/2 \leqq \eta \leqq \pi/2, \quad 0 \leqq \phi < 2\pi$

20.97. $h_1^2 = h_2^2 = a^2(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta), \quad h_3^2 = a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta$

20.98.
$$\nabla^2\Phi = \frac{1}{a^2(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta)\cosh\xi}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cosh\xi\frac{\partial\Phi}{\partial\xi}\right) + \frac{1}{a^2(\text{senh}^2\,\xi + \text{sen}^2\,\eta)\cos\eta}\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos\eta\frac{\partial\Phi}{\partial\eta}\right) + \frac{1}{a^2\cosh^2\xi\cos^2\eta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

Al girar las curvas de la figura 20-15 alrededor del eje y, el cual se renombra como eje z, se obtienen dos sistemas de superficies coordenadas. El tercer sistema de superficies coordenadas se forma mediante los planos que pasan por dicho eje.

Coordenadas bipolares (u, υ, z)

20.99. $x = \dfrac{a\,\text{senh}\,\upsilon}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad y = \dfrac{a\,\text{sen}\,u}{\cosh\upsilon - \cos u}, \quad z = z$

donde: $0 \leqq u < 2\pi, \quad -\infty < \upsilon < \infty, \quad -\infty < z < \infty$

o

20.100. $x^2 + (y - a\cot u)^2 = a^2\csc^2 u, \quad (x - a\coth\upsilon)^2 + y^2 = a^2\text{csch}^2\upsilon, \quad z = z$

20.101. $h_1^2 = h_2^2 = \dfrac{a^2}{(\cosh \upsilon - \cos u)^2}, \qquad h_3^2 = 1$

20.102. $\nabla^2 \Phi = \dfrac{(\cosh \upsilon - \cos u)^2}{a^2}\left(\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial \upsilon^2}\right) + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$

Las trazas de las superficies coordenadas en el plano xy se muestran en la figura 20-16.

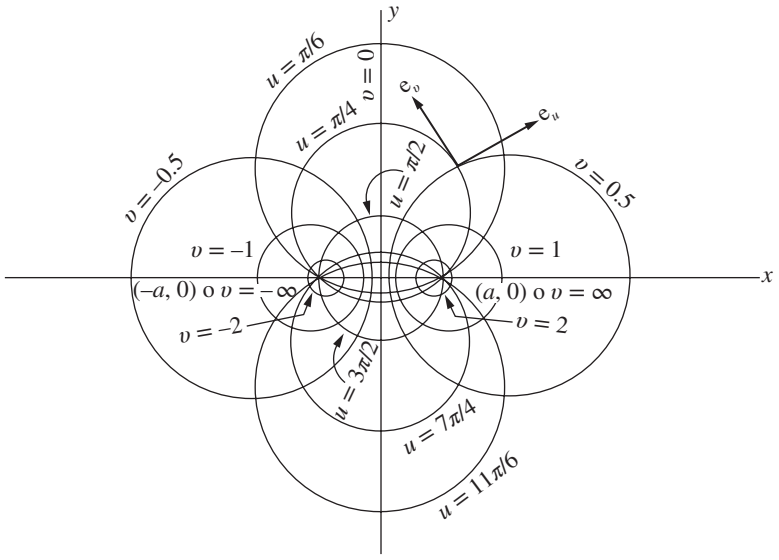


Fig. 20-16 Coordenadas bipolares.

Coordenadas toroidales (u, υ, ϕ)

20.103. $x = \dfrac{a \operatorname{senh} \upsilon \cos \varphi}{\cosh \upsilon - \cos u}, \qquad y = \dfrac{a \operatorname{senh} \upsilon \operatorname{sen} \varphi}{\cosh \upsilon - \cos u}, \qquad z = \dfrac{a \operatorname{sen} u}{\cosh \upsilon - \cos u}$

20.104. $h_1^2 = h_2^2 = \dfrac{a^2}{(\cosh \upsilon - \cos u)^2}, \qquad h_3^2 = \dfrac{a^2 \operatorname{senh}^2 \upsilon}{(\cosh \upsilon - \cos u)^2}$

20.105. $\nabla^2 \Phi = \dfrac{(\cosh \upsilon - \cos u)^3}{a^2}\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{1}{\cosh \upsilon - \cos u}\dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\right)$

$$+ \frac{(\cosh \upsilon - \cos u)^3}{a^2 \operatorname{senh} \upsilon}\frac{\partial}{\partial \upsilon}\left(\frac{\operatorname{senh} \upsilon}{\cosh \upsilon - \cos u}\frac{\partial \Phi}{\partial \upsilon}\right) + \frac{(\cosh \upsilon - \cos u)^2}{a^2 \operatorname{senh}^2 \upsilon}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2}$$

Al girar las curvas de la figura 20-16 alrededor del eje y, el cual se renombra como eje z, se obtienen dos sistemas de superficies coordenadas.

Coordenadas cónicas (λ, μ, ν)

20.106. $x = \dfrac{\lambda \mu \nu}{ab}, \qquad y = \dfrac{\lambda}{a}\sqrt{\dfrac{(\mu^2 - a^2)(\nu^2 - a^2)}{a^2 - b^2}}, \qquad z = \dfrac{\lambda}{b}\sqrt{\dfrac{(\mu^2 - b^2)(\nu^2 - b^2)}{b^2 - a^2}}$

20.107. $h_1^2 = 1, \qquad h_2^2 = \dfrac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\mu^2 - a^2)(b^2 - \mu^2)}, \qquad h_3^2 = \dfrac{\lambda^2(\mu^2 - \nu^2)}{(\nu^2 - a^2)(\nu^2 - b^2)}$

Coordenadas homofocales elipsoidales (λ, μ, υ)

20.108.
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{y^2}{b^2-\lambda}+\dfrac{z^2}{c^2-\lambda}=1, & \lambda < c^2 < b^2 < a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu}+\dfrac{y^2}{b^2-\mu}+\dfrac{z^2}{c^2-\mu}=1, & c^2 < \mu < b^2 < a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-v}+\dfrac{y^2}{b^2-v}+\dfrac{z^2}{c^2-v}=1, & c^2 < b^2 < v < a^2 \end{cases}$$

o

20.109.
$$\begin{cases} x^2=\dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-v)}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)} \\ y^2=\dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-v)}{(b^2-a^2)(a^2-c^2)} \\ z^2=\dfrac{(c^2-\lambda)(c^2-\mu)(c^2-v)}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)} \end{cases}$$

20.110.
$$\begin{cases} h_1^2=\dfrac{(\mu-\lambda)(v-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)(c^2-\lambda)} \\ h_2^2=\dfrac{(v-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)(c^2-\mu)} \\ h_3^2=\dfrac{(\lambda-v)(\mu-v)}{4(a^2-v)(b^2-v)(c^2-v)} \end{cases}$$

Coordenadas homofocales paraboloidales (λ, μ, v)

20.111.
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2-\lambda}+\dfrac{h^2}{b^2-\lambda}=z-\lambda, & -\infty < \lambda < b^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-\mu}+\dfrac{y^2}{b^2-\mu}=z-\mu, & b^2 < \mu < a^2 \\ \dfrac{x^2}{a^2-v}+\dfrac{y^2}{b^2-v}=z-v, & a^2 < v < \infty \end{cases}$$

o

20.112.
$$\begin{cases} x^2=\dfrac{(a^2-\lambda)(a^2-\mu)(a^2-v)}{b^2-a^2} \\ y^2=\dfrac{(b^2-\lambda)(b^2-\mu)(b^2-v)}{a^2-b^2} \\ z=\lambda+\mu+v-a^2-b^2 \end{cases}$$

20.113.
$$\begin{cases} h_1^2=\dfrac{(\mu-\lambda)(v-\lambda)}{4(a^2-\lambda)(b^2-\lambda)} \\ h_2^2=\dfrac{(v-\mu)(\lambda-\mu)}{4(a^2-\mu)(b^2-\mu)} \\ h_3^2=\dfrac{(\lambda-v)(\mu-v)}{16(a^2-v)(b^2-v)} \end{cases}$$

21 SERIES DE CONSTANTES

Serie aritmética

21.1. $a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+\{a+(n-1)d\}=\frac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}=\frac{1}{2}n(a=l)$

donde $l = a + (n - 1)d$ es el último término.

Algunos casos especiales son

21.2. $1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$

21.3. $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$

Serie geométrica

21.4. $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a-rl}{1-r}$

donde $l = ar^{n-1}$ es el último término y $r \neq 1$.

Si $-1 < r < 1$, entonces

21.5. $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots=\dfrac{a}{1-r}$

Serie aritmética-geométrica

21.6. $a+(a+d)r+(a+2d)r^2+\cdots+\{a+(n-1)d\}r^{n-1}=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}+\dfrac{rd\{1-nr^{n-1}+(n-1)r^n\}}{(1-r)^2}$

donde $r \neq 1$.

Si $-1 < r < 1$, entonces

21.7. $a+(a+d)r+(d+2d)r^2+\cdots=\dfrac{a}{1-r}+\dfrac{rd}{(1-r)^2}$

Sumas de potencias de números enteros positivos

21.8. $1^p+2^p+3^p+\cdots+n^p=\dfrac{n^{p+1}}{p+1}+\frac{1}{2}n^p+\dfrac{B_1pn^{p-1}}{2!}-\dfrac{B_2p(p-1)(p-2)n^{p-3}}{4!}+\cdots$

donde la serie termina en n^2 o n dependiendo si p es par o impar y B_k son los *números de Bernoulli* (vea la página 142).

Algunos casos especiales son

21.9. $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

21.10. $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

21.11. $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}=(1+2+3+\cdots+n)^2$

21.12. $1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4=\dfrac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$

Si $S_k=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k$, donde k y n son enteros positivos, entonces

21.13. $\begin{pmatrix} k+1 \\ 1 \end{pmatrix} S_1+\begin{pmatrix} k+1 \\ 2 \end{pmatrix} S_2+\cdots+\begin{pmatrix} k+1 \\ k \end{pmatrix} S_k=(n+1)^{k+1}-(n+1)$

Series que contienen recíprocos de potencias de enteros positivos

21.14. $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\cdots=\ln 2$

21.15. $1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{9}-\cdots=\dfrac{\pi}{4}$

21.16. $1-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{10}+\dfrac{1}{13}-\cdots=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+\dfrac{1}{3}\ln 2$

21.17. $1-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{17}-\cdots=\dfrac{\pi\sqrt{2}}{8}+\dfrac{\sqrt{2}\ln(1+\sqrt{2})}{4}$

21.18. $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{11}+\dfrac{1}{14}-\cdots=\dfrac{\pi\sqrt{3}}{9}+\dfrac{1}{3}\ln 2$

21.19. $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{6}$

21.20. $\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{4^4}+\cdots=\dfrac{\pi^4}{90}$

21.21. $\dfrac{1}{1^6}+\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}+\dfrac{1}{4^6}+\cdots=\dfrac{\pi^6}{945}$

21.22. $\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{4^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{12}$

21.23. $\dfrac{1}{1^4}-\dfrac{1}{2^4}+\dfrac{1}{3^4}-\dfrac{1}{4^4}+\cdots=\dfrac{7\pi^4}{720}$

21.24. $\dfrac{1}{1^6}-\dfrac{1}{2^6}+\dfrac{1}{3^6}-\dfrac{1}{4^6}+\cdots=\dfrac{31\pi^6}{30\,240}$

21.25. $\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\cdots=\dfrac{\pi^2}{8}$

21.26. $\dfrac{1}{1^4}+\dfrac{1}{3^4}+\dfrac{1}{5^4}+\dfrac{1}{7^4}+\cdots=\dfrac{\pi^4}{96}$

21.27. $\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\cdots=\frac{\pi^6}{960}$

21.28. $\frac{1}{1^3}-\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{\pi^3}{32}$

21.29. $\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}-\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\cdots=\frac{3\pi^3\sqrt{2}}{128}$

21.30. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{7\cdot 9}+\cdots=\frac{1}{2}$

21.31. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{4\cdot 6}+\cdots=\frac{3}{4}$

21.32. $\frac{1}{1^2\cdot 3^2}+\frac{1}{3^2\cdot 5^2}+\frac{1}{5^2\cdot 7^2}+\frac{1}{7^2\cdot 9^2}+\cdots=\frac{\pi^2-8}{16}$

21.33. $\frac{1}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2}+\frac{1}{2^2\cdot 3^2\cdot 4^2}+\frac{1}{3^2\cdot 4^2\cdot 5^2}+\cdots=\frac{4\pi^2-39}{16}$

21.34. $\frac{1}{a}-\frac{1}{a+d}+\frac{1}{a+2d}-\frac{1}{a+3d}+\cdots=\int_0^1\frac{u^{a-1}du}{1+u^d}$

21.35. $\frac{1}{1^{2p}}+\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{4^{2p}}+\cdots=\frac{2^{2p-1}\pi^{2p}B_p}{(2p)!}$

21.36. $\frac{1}{1^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}+\frac{1}{5^{2p}}+\frac{1}{7^{2p}}+\cdots=\frac{(2^{2p}-1)\pi^{2p}B_p}{2(2p)!}$

21.37. $\frac{1}{1^{2p}}-\frac{1}{2^{2p}}+\frac{1}{3^{2p}}-\frac{1}{4^{2p}}+\cdots=\frac{(2^{2p-1}-1)\pi^{2p}B_p}{(2p)!}$

21.38. $\frac{1}{1^{2p+1}}-\frac{1}{3^{2p+1}}+\frac{1}{5^{2p+1}}-\frac{1}{7^{2p+1}}+\cdots=\frac{\pi^{2p+1}E_p}{2^{2p+2}(2p)!}$

Series varias

21.39. $\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cdots+\cos n\alpha=\frac{\operatorname{sen}(n+1/2)\alpha}{2\operatorname{sen}(\alpha/2)}$

21.40. $\operatorname{sen}\alpha+\operatorname{sen}2\alpha+\operatorname{sen}3\alpha+\cdots+\operatorname{sen}n\alpha=\frac{\operatorname{sen}[1/2(n+1)]\alpha\,\operatorname{sen}1/2n\alpha}{\operatorname{sen}(\alpha/2)}$

21.41. $1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+r^3\cos 3\alpha+\cdots=\frac{1-r\cos\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}$, $|r|<1$

21.42. $r\operatorname{sen}\alpha+r^2\operatorname{sen}2\alpha+r^3\operatorname{sen}3\alpha+\cdots=\frac{r\operatorname{sen}\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}$, $|r|<1$

21.43. $1+r\cos\alpha+r^2\cos 2\alpha+\cdots+r^n\cos n\alpha=\frac{r^{n+2}\cos n\alpha-r^{n+1}\cos(n+1)\alpha-r\cos\alpha+1}{1-2r\cos\alpha+r^2}$

21.44. $r\operatorname{sen}\alpha+r^2\operatorname{sen}2\alpha+\cdots+r^n\operatorname{sen}n\alpha=\frac{r\operatorname{sen}\alpha-r^{n+1}\operatorname{sen}(n+1)\alpha+r^{n+2}\operatorname{sen}n\alpha}{1-2r\cos\alpha+r^2}$

Fórmula de Euler-Maclaurin

21.45. $$\sum_{k=1}^{n-1} F(k) = \int_0^n F(k)dk - \frac{1}{2}\{F(0)+F(n)\}$$
$$+\frac{1}{12}\{F'(n)-F(0)\}-\frac{1}{720}\{F'''(n)-F'''(0)\}$$
$$+\frac{1}{30\ 240}\{F^{(v)}(n)-F^{(v)}(0)\}-\frac{1}{1\,209\,600}\{F^{(vii)}(n)-F^{(vii)}(0)\}$$
$$+\cdots(-1)^{p-1}\frac{B_p}{(2p)!}\{F^{(2p-1)}(n)-F^{(2p-1)}(0)\}+\cdots$$

Fórmula de la suma de Poisson

21.46. $$\sum_{k=-\infty}^{\infty} F(k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi imx}F(x)\,dx\right\}$$

22 SERIES DE TAYLOR

Series de Taylor para funciones de una sola variable

22.1. $$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$$

donde R_n es el residuo después de los primeros n términos y está dado por cualquiera de las siguientes fórmulas:

22.2. **Fórmula de Lagrange** $$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$$

22.3. **Fórmula de Cauchy** $$R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!}$$

El valor ξ que puede ser diferente en las dos fórmulas, se encuentra entre a y x. El resultado es válido si $f(x)$ tiene derivadas continuas de orden n como mínimo.

Si $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$, la serie infinita que se obtiene se llama *serie de Taylor* para $f(x)$ alrededor del punto $x = a$. Cuando $a = 0$, la serie se llama *serie de Maclaurin*. Estas series, típicamente llamadas *series de potencias*, convergen para todos los valores de x de cierto intervalo llamado *intervalo de convergencia* y divergen para todos los x fuera de dicho intervalo.

Algunas series contienen los números de Bernoulli B_n y los números de Euler E_n definidos en el capítulo 23, páginas 142 y 143.

Expansión en series de potencias de binomios

22.4. $$(a+x)^n=a^n+na^{n-1}x+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}x^3+\cdots$$
$$=a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}x+\binom{n}{2}a^{n-2}x^2+\binom{n}{3}a^{n-3}x^3+\cdots$$

Son casos especiales

22.5. $$(a+x)^2=a^2+2ax+x^2$$

22.6. $$(a+x)^3=a^3+3a^2x+3ax^2+x^3$$

22.7. $$(a+x)^4=a^4+4a^3x+6a^2x^2+4ax^3+x^4$$

22.8. $$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+x^4-\cdots \qquad -1<x<1$$

22.9. $$(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+5x^4-\cdots \qquad -1<x<1$$

22.10. $$(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3+15x^4-\cdots \qquad -1<x<1$$

22.11. $(1+x)^{-1/2} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\bullet 3}{2\bullet 4}x^2 - \frac{1\bullet 3\bullet 5}{2\bullet 4\bullet 6}x^3 + \cdots$ $-1 < x \leqq 1$

22.12. $(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2\bullet 4}x^2 + \frac{1\bullet 3}{2\bullet 4\bullet 6}x^3 - \cdots$ $-1 < x \leqq 1$

22.13. $(1+x)^{-1/3} = 1 - \frac{1}{3}x + \frac{1\bullet 4}{3\bullet 6}x^2 - \frac{1\bullet 4\bullet 7}{3\bullet 6\bullet 9}x^3 + \cdots$ $-1 < x \leqq 1$

22.14. $(1+x)^{1/3} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{2}{3\bullet 6}x^2 + \frac{2\bullet 5}{3\bullet 6\bullet 9}x^3 - \cdots$ $-1 < x \leqq 1$

Expansión en series de potencias de funciones exponenciales y logarítmicas

22.15. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$ $-\infty < x < \infty$

22.16. $a^x = e^{x \ln a} = 1 + x \ln a + \frac{(x \ln a)^2}{2!} + \frac{(x \ln a)^3}{3!} + \cdots$ $-\infty < x < \infty$

22.17. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$ $-1 < x \leqq 1$

22.18. $\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots$ $-1 < x < 1$

22.19. $\ln x = 2\left\{\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots\right\}$ $x > 0$

22.20. $\ln x = \left(\frac{x-1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x}\right)^3 + \cdots$ $x \geqq \frac{1}{2}$

Expansión en series de potencias de funciones trigonométricas

22.21. $\operatorname{sen} x + x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$ $-\infty < x < \infty$

22.22. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$ $-\infty < x < \infty$

22.23. $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$ $|x| < \frac{\pi}{2}$

22.24. $\cot x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} - \frac{2x^5}{945} - \cdots - \frac{2^{2n}B_n x^{2n-1}}{(2n)!} - \cdots$ $0 < |x| < \pi$

22.25. $\sec x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + \frac{61x^6}{720} + \cdots + \frac{E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots$ $|x| < \frac{\pi}{2}$

22.26. $\csc x = \frac{1}{x} + \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} + \frac{31x^5}{15\,120} + \cdots + \frac{2(2^{2n-1}-1)B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots$ $0 < |x| < \pi$

22.27. $\operatorname{sen}^{-1} x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\bullet 3}{2\bullet 4}\frac{x^5}{5} + \frac{1\bullet 3\bullet 5}{2\bullet 4\bullet 6}\frac{x^7}{7} + \cdots$ $|x| < 1$

22.28. $\cos^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{sen}^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \left(x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1\bullet 3}{2\bullet 4}\frac{x^5}{5} + \cdots\right)$ $|x| < 1$

22.29. $$\tan^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \cdots & |x| < 1 \\ \pm\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{3x^3} - \dfrac{1}{5x^5} + \cdots & (+ \text{ si } x \geqq 1, - \text{ si } x \leqq -1) \end{cases}$$

22.30. $$\cot^{-1} x = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} - \left(x - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \cdots \right) & |x| < 1 \\ p\pi + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{3x^3} + \dfrac{1}{5x^5} - \cdots & (p = 0 \text{ si } x > 1,\ p = 1 \text{ si } x < -1) \end{cases}$$

22.31. $$\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x) = \frac{\pi}{2} - \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{2 \bullet 3x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \bullet 4 \bullet 5x^5} + \cdots \right) \qquad |x| > 1$$

22.32. $$\csc^{-1} x = \operatorname{sen}^{-1}(1/x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2 \quad 3x^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \quad 4 \quad 5x^5} + \cdots \qquad |x| > 1$$

Expansión en series de potencias de funciones hiperbólicas

22.33. $$\operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

22.34. $$\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

22.35. $$\tanh x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n} - 1) B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

22.36. $$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \frac{2x^5}{945} + \cdots \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$$

22.37. $$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} - \frac{61x^6}{720} + \cdots \frac{(-1)^n E_n x^{2n}}{(2n)!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

22.38. $$\operatorname{csch} x = \frac{1}{x} - \frac{x}{6} + \frac{7x^3}{360} - \frac{31x^5}{15{,}120} + \cdots \frac{(-1)^n 2(2^{2n-1} - 1) B_n x^{2n-1}}{(2n)!} + \cdots \qquad 0 < |x| < \pi$$

22.39. $$\operatorname{senh}^{-1} x = \begin{cases} x - \dfrac{x^3}{2 \bullet 3} + \dfrac{1 \bullet 3x^5}{2 \bullet 4 \bullet 5} - \dfrac{1 \bullet 3 \bullet 5x^7}{2 \bullet 4 \bullet 6 \bullet 7} + \cdots & |x| < 1 \\ \pm\left(\ln|2x| + \dfrac{1}{2 \bullet 2x^2} - \dfrac{1 \bullet 3}{2 \bullet 4 \bullet 4x^4} + \dfrac{1 \bullet 3 \bullet 5}{2 \bullet 4 \bullet 6 \bullet 6x^6} - \cdots \right) & \begin{bmatrix} + \text{ si } x \geqq 1 \\ - \text{ si } x \leqq -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

22.40. $$\cosh^{-1} x = \pm\left\{ \ln(2x) - \left(\frac{1}{2 \bullet 2x^2} + \frac{1 \bullet 3}{2 \bullet 4 \bullet 4x^4} + \frac{1 \quad 3 \quad 5}{2 \quad 4 \quad 6 \quad 6x^6} + \cdots \right) \right\} \qquad \begin{bmatrix} + \text{ si } \cosh^{-1} x > 0,\ x \geqq 1 \\ - \text{ si } \cosh^{-1} x < 0,\ x \geqq 1 \end{bmatrix}$$

22.41. $$\tanh^{-1} x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \cdots \qquad |x| < 1$$

22.42. $$\coth^{-1} x = \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} + \cdots \qquad |x| > 1$$

Expansión en series de potencias de funciones varias

22.43. $$e^{\operatorname{sen} x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} - \frac{x^5}{15} + \cdots \qquad -\infty < x < \infty$$

22.44. $$e^{\cos x} = e\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{6} - \frac{31x^6}{720} + \cdots \right) \qquad -\infty < x < \infty$$

22.45. $e^{\tan x} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2} + \frac{3x^4}{8} + \cdots$ $\quad |x| < \frac{\pi}{2}$

22.46. $e^x \operatorname{sen} x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} - \frac{x^6}{90} + \cdots + \frac{2^{n/2} \operatorname{sen}(n\pi/4) x^n}{n!} + \cdots$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.47. $e^x \cos x = 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} + \cdots + \frac{2^{n/2} \cos(n\pi/4) x^n}{n!} +$ $\quad -\infty < x < \infty$

22.48. $\ln|\operatorname{sen} x| = \ln|x| - \frac{x^2}{6} - \frac{x^4}{180} - \frac{x^6}{2835} - \cdots - \frac{2^{2n-1} B_n x^{2n}}{n(2n)!} +$ $\quad 0 < |x| < \pi$

22.49. $\ln|\cos x| = -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} - \frac{17x^8}{2520} - \cdots - \frac{2^{2n-1}(2^{2n}-1) B_n x^{2n}}{n(2n)!} +$ $\quad x| < \frac{\pi}{2}$

22.50. $\ln|\tan x| = \ln|x| + \frac{x^2}{3} + \frac{7x^4}{90} + \frac{62x^6}{2835} + \cdots + \frac{2^{2n}(2^{2n-1}-1) B_n x^{2n}}{n(2n)!} + \cdots$ $\quad 0 < |x| < \frac{\pi}{2}$

22.51. $\frac{\ln(1+x)}{1+x} = x - (1 + \frac{1}{2})x^2 + (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3})x^3 - \cdots$ $\quad |x| < 1$

Reversión de series de potencias

Suponga que

22.52. $y = C_1 x + C_2 x^2 + C_3 x^3 + C_4 x^4 + C_5 x^5 + C_6 x^6 + \cdots$

entonces

22.53. $x = C_1 y + C_2 y^2 + C_3 y^3 + C_4 y^4 + C_5 y^5 + C_6 y^6 + \cdots$

donde

22.54. $c_1 C_1 = 1$

22.55. $c_1^3 C_2 = -c_2$

22.56. $c_1^5 C_3 = 2c_2^2 - c_1 c_3$

22.57. $c_1^7 C_4 = 5c_1 c_2 c_3 - 5c_2^3 - c_1^2 c_4$

22.58. $c_1^9 C_5 = 6c_1^2 c_2 c_4 + 3c_1^2 c_3^2 - c_1^3 c_5 + 14c_2^4 - 21c_1 c_2^2 c_3$

22.59. $c_1^{11} C_6 = 7c_1^3 c_2 c_5 + 84c_1 c_2^3 c_3 + 7c_1^3 c_3 c_4 - 28c_1^2 c_2 c_3^2 - c_1^4 c_6 - 28c_1^2 c_2^2 c_4 - 42c_2^5$

Series de Taylor para funciones de dos variables

22.60. $f(x,y) = f(a,b) + (x-a) f_x(a,b) + (y-b) f_y(a,b)$

$$+ \frac{1}{2!}\{(x-a)^2 f_{xx}(a,b) + 2(x-a)(y-b) f_{xy}(a,b) + (y-b)^2 f_{yy}(a,b)\} + \cdots$$

donde $f_x(a,b)$, $f_y(a,b)$,… denotan los valores de las derivadas parciales respecto a x, y, … cuando $x = a$ y $y = b$.

23 NÚMEROS DE BERNOULLI Y NÚMEROS DE EULER

Definición de los números de Bernoulli

Los *números de Bernoulli* $B_1, B_2, B_3, \ldots$ se definen a partir de las series

23.1. $$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{B_1 x^2}{2!} - \frac{B_2 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} - \cdots \qquad |x| < 2\pi$$

23.2. $$1 - \frac{x}{2}\cot\frac{x}{2} = \frac{B_1 x^2}{2!} + \frac{B_3 x^4}{4!} + \frac{B_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \pi$$

Definición de los números de Euler

Los *números de Euler* $E_1, E_2, E_3, \ldots$ se definen a partir de las series

23.3. $$\operatorname{sech} x = 1 - \frac{E_1 x^2}{2!} + \frac{E_2 x^4}{4!} - \frac{E_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

23.4. $$\sec x = 1 + \frac{E_1 x^2}{2!} + \frac{E_2 x^4}{4!} - \frac{E_3 x^6}{6!} + \cdots \qquad |x| < \frac{\pi}{2}$$

Tabla de los primeros números de Bernoulli y números de Euler

Números de Bernoulli	Números de Euler
$B_1 = 1/6$	$E_1 = 1$
$B_2 = 1/30$	$E_2 = 5$
$B_3 = 1/42$	$E_3 = 61$
$B_4 = 1/30$	$E_4 = 1\,385$
$B_5 = 5/66$	$E_5 = 50\,521$
$B_6 = 691/2\,730$	$E_6 = 2\,702\,765$
$B_7 = 7/6$	$E_7 = 199\,360\,981$
$B_8 = 3\,617/510$	$E_8 = 19\,391\,512\,145$
$B_9 = 43\,867/798$	$E_9 = 2\,404\,879\,675\,441$
$B_{10} = 174\,611/330$	$E_{10} = 370\,371\,188\,237\,525$
$B_{11} = 854\,513/138$	$E_{11} = 69\,348\,874\,393\,137\,901$
$B_{12} = 236\,364\,091/2\,730$	$E_{12} = 15\,514\,534\,163\,557\,086\,905$

Relaciones entre los números de Bernoulli y los números de Euler

23.5. $\binom{2n+1}{2}2^2B_1-\binom{2n+1}{4}2^4B_2+\binom{2n+1}{6}2^6B_3-\cdots(-1)^{n-1}(2n+1)2^{2n}B_n=2n$

23.6. $E_n=\binom{2n}{2}E_{n-1}-\binom{2n}{4}E_{n-2}+\binom{2n}{6}E_{n-3}-\cdots(-1)^n$

23.7. $B_n=\dfrac{2n}{2^{2n}(2^{2n}-1)}\left\{\binom{2n-1}{1}E_{n-1}-\binom{2n-1}{3}E_{n-2}+\binom{2n-1}{5}E_{n-3}-\cdots(-1)^{n-1}\right\}$

Series que contienen números de Bernoulli y números de Euler

23.8. $B_n=\dfrac{(2n)!}{2^{2n-1}\pi^{2n}}\left\{1+\dfrac{1}{2^{2n}}+\dfrac{1}{3^{2n}}+\cdots\right\}$

23.9. $B_n=\dfrac{2(2n)!}{(2^{2n}-1)\pi^{2n}}\left\{1+\dfrac{1}{3^{2n}}+\dfrac{1}{5^{2n}}+\cdots\right\}$

23.10. $B_n=\dfrac{2(2n)!}{(2^{2n-1}-1)\pi^{2n}}\left\{1-\dfrac{1}{2^{2n}}+\dfrac{1}{3^{2n}}-\cdots\right\}$

23.11. $E_n=\dfrac{2^{2n+2}(2n)!}{\pi^{2n+1}}\left\{1-\dfrac{1}{3^{2n+1}}+\dfrac{1}{5^{2n+1}}-\cdots\right\}$

Fórmula asintótica para números de Bernoulli

23.12. $B_n\sim 4n^{2n}(\pi e)^{-2n}\sqrt{\pi n}$

24 SERIES DE FOURIER

Definición de las series de Fourier

Las series de Fourier correspondientes a una función $f(x)$ definida en el intervalo $c \leqq x \leqq c + 2L$, donde c y $L > 0$ son constantes, están definidas por

24.1. $$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

donde

24.2. $$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\cos\frac{n\pi x}{L}\,dx \\ b_n = \dfrac{1}{L}\displaystyle\int_c^{c+2L} f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \end{cases}$$

Si $f(x)$ y $f'(x)$ son continuas por segmentos y $f(x)$ está definida por una extensión periódica de $2L$, es decir $f(x + 2L) = f(x)$, entonces la serie converge a $f(x)$ si x es un punto de continuidad y a $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ si x es un punto de discontinuidad.

Forma compleja de las series de Fourier

Si suponemos que la serie 24.1 converge a $f(x)$, tenemos que

24.3. $$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\pi x/L}$$

donde

24.4. $$c_n = \frac{1}{2L}\int_c^{c+2L} f(x)e^{-in\pi x/L}\,dx = \begin{cases} \frac{1}{2}(a_n - ib_n) & n > 0 \\ \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) & n < 0 \\ \frac{1}{2}a_0 & n = 0 \end{cases}$$

Identidad de Parseval

24.5. $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} \{f(x)\}^2\,dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Identidad de Parseval generalizada

24.6. $$\frac{1}{L}\int_c^{c+2L} f(x)g(x)\,dx = \frac{a_0 c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n c_n + b_n d_n)$$

donde a_n, b_n y c_n, d_n son los coeficientes de Fourier de $f(x)$ y $g(x)$, respectivamente.

Series de Fourier notables y sus gráficas

24.7. $f(x)=\begin{cases}1 & 0<x<\pi\\ -1 & -\pi<x<0\end{cases}$

$$\frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3}+\frac{\operatorname{sen}5x}{5}+\cdots\right)$$

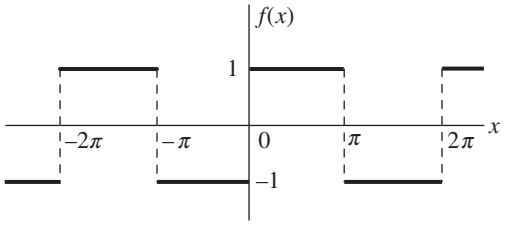


Fig. 24-1

24.8. $f(x)=|x|=\begin{cases}x & 0<x<\pi\\ -x & -\pi<x<0\end{cases}$

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\cdots\right)$$

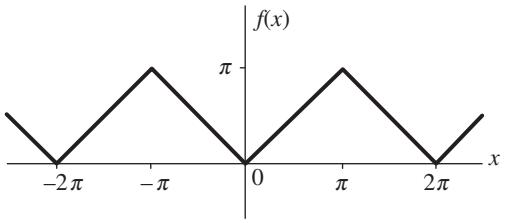


Fig. 24-2

24.9. $f(x)=x,\quad -\pi<x<\pi$

$$2\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1}-\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3}-\cdots\right)$$

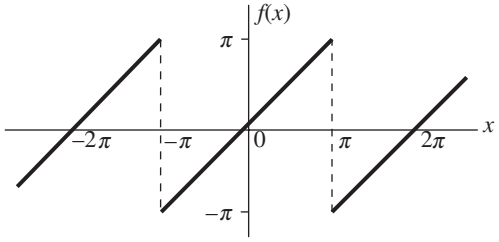


Fig. 24-3

24.10. $f(x)=x,\quad 0<x<2\pi$

$$\pi-2\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1}+\frac{\operatorname{sen}2x}{2}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3}+\cdots\right)$$

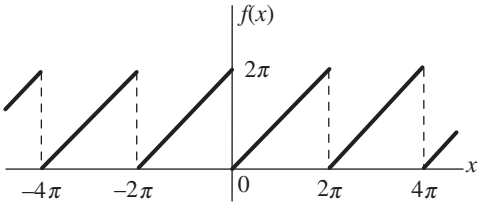


Fig. 24-4

24.11. $f(x)=|\operatorname{sen}x|,\quad -\pi<x<\pi$

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\cdot 3}+\frac{\cos 4x}{3\cdot 5}+\frac{\cos 6x}{5\cdot 7}+\cdots\right)$$

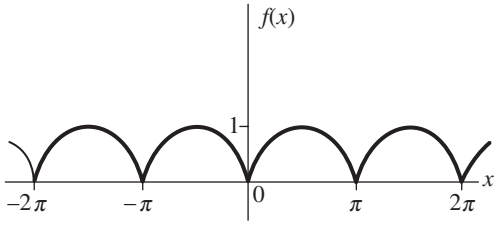


Fig. 24-5

24.12. $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sen}x & 0<x<\pi\\ 0 & \pi<x<2\pi\end{cases}$

$$\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\operatorname{sen}x-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos 2x}{1\bullet 3}+\frac{\cos 4x}{3\bullet 5}+\frac{\cos 6x}{5\bullet 7}+\cdots\right)$$

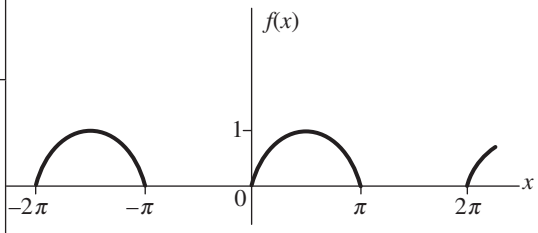


Fig. 24-6

24.13. $f(x)=\begin{cases}\cos x & 0<x<\pi\\ -\cos x & -\pi<x<0\end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}2x}{1\bullet 3}+\frac{2\operatorname{sen}4x}{3\bullet 5}+\frac{3\operatorname{sen}6x}{5\bullet 7}+\cdots\right)$$

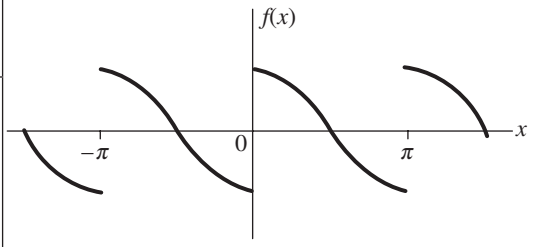


Fig. 24-7

24.14. $f(x)=x^2,\quad -\pi<x<\pi$

$$\frac{\pi^2}{3}-4\left(\frac{\cos x}{1^2}-\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}-\cdots\right)$$

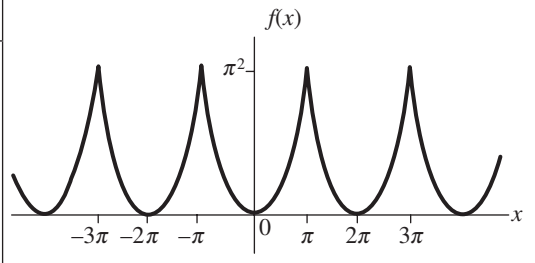


Fig. 24-8

24.15. $f(x)=x(\pi-x),\quad 0<x<\pi$

$$\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\cdots\right)$$

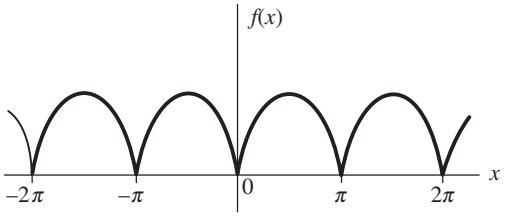


Fig. 24-9

24.16. $f(x)=x(\pi-x)(\pi+x),\quad -\pi<x<\pi$

$$12\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^3}-\frac{\operatorname{sen}2x}{2^3}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3^3}-\cdots\right)$$

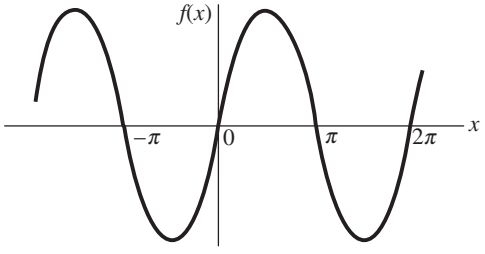


Fig. 24-10

24.17. $f(x)=\begin{cases}0 & 0<x<\pi-\alpha\\ 1 & \pi-\alpha<x<\pi+\alpha\\ 0 & \pi+\alpha<x<2\pi\end{cases}$

$$\frac{\alpha}{\pi}-\frac{2}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos x}{1}-\frac{\operatorname{sen}2\alpha\cos 2x}{2}+\frac{\operatorname{sen}3\alpha\cos 3x}{3}-\cdots\right)$$

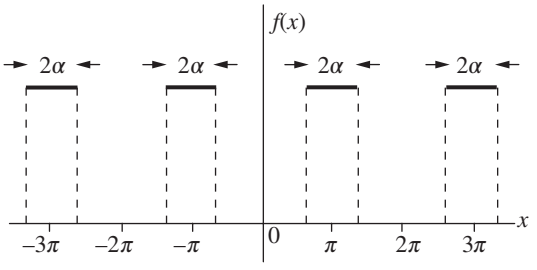


Fig. 24-11

24.18. $f(x)=\begin{cases}x(\pi-x) & 0<x<\pi\\ -x(\pi-x) & -\pi<x<0\end{cases}$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^3}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3^3}+\frac{\operatorname{sen}5x}{5^3}+\cdots\right)$$

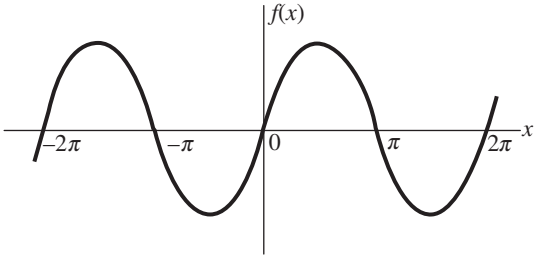


Fig. 24-12

Series de Fourier varias

24.19. $f(x)=\operatorname{sen}\mu x,\quad -\pi<x<\pi,\quad \mu\neq$ entero

$$\frac{2\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}x}{1^2-\mu^2}-\frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2-\mu^2}+\frac{3\operatorname{sen}3x}{3^2-\mu^2}-\cdots\right)$$

24.20. $f(x)=\cos\mu x,\quad -\pi<x<\pi,\quad \mu\neq$ entero

$$\frac{2\mu\operatorname{sen}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}+\frac{\cos x}{1^2-\mu^2}-\frac{\cos 2x}{2^2-\mu^2}+\frac{\cos 3x}{3^2-\mu^2}-\cdots\right)$$

24.21. $f(x)=\tan^{-1}[(a\operatorname{sen}x)/(1-a\cos x)],\quad -\pi<x<\pi,\quad |a|<1$

$$a\operatorname{sen}x+\frac{a^2}{2}\operatorname{sen}2x+\frac{a^3}{3}\operatorname{sen}3x+\cdots$$

24.22. $f(x)=\ln(1-2a\cos x+a^2),\quad -\pi<x<\pi,\quad |a|<1$

$$-2\left(a\cos x+\frac{a^2}{2}\cos 2x+\frac{a^3}{3}\cos 3x+\cdots\right)$$

24.23. $f(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}[(2a\operatorname{sen}x)/(1-a^2)],\quad -\pi<x<\pi,\quad |a|<1$

$$a\operatorname{sen}x+\frac{a^3}{3}\operatorname{sen}3x+\frac{a^5}{5}\operatorname{sen}5x+\cdots$$

24.24. $f(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}[(2a\cos x)/(1-a^2)],\quad -\pi<x<\pi,\quad |a|<1$

$$a\cos x-\frac{a^3}{3}\cos 3x+\frac{a^5}{5}\cos 5x-\cdots$$

24.25. $f(x) = e^{\mu x}, -\pi < x < \pi$

$$\frac{2\operatorname{senh}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\mu\cos nx - n\operatorname{sen} nx)}{\mu^2+n^2}\right)$$

24.26. $f(x) = \operatorname{senh}\mu x, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{2\operatorname{senh}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{1^2+\mu^2}-\frac{2\operatorname{sen}2x}{2^2+\mu^2}+\frac{3\operatorname{sen}3x}{3^2+\mu^2}-\cdots\right)$$

24.27. $f(x) = \cosh\mu x, \quad -\pi < x < \pi$

$$\frac{2\mu\operatorname{senh}\mu\pi}{\pi}\left(\frac{1}{2\mu^2}-\frac{\cos x}{1^2+\mu^2}+\frac{\cos 2x}{2^2+\mu^2}-\frac{\cos 3x}{3^2+\mu^2}+\cdots\right)$$

24.28. $f(x) = \ln|\operatorname{sen}\tfrac{1}{2}x|, \quad 0 < x < \pi$

$$-\left(\ln 2+\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}+\frac{\cos 3x}{3}+\cdots\right)$$

24.29. $f(x) = \ln|\cos\tfrac{1}{2}x|, \quad -\pi < x < \pi$

$$-\left(\ln 2-\frac{\cos x}{1}+\frac{\cos 2x}{2}-\frac{\cos 3x}{3}+\cdots\right)$$

24.30. $f(x) = \tfrac{1}{6}\pi^2-\tfrac{1}{2}\pi x+\tfrac{1}{4}x^2, \quad 0\leqq x\leqq 2\pi$

$$\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 2x}{2^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\cdots$$

24.31. $f(x) = \tfrac{1}{12}x(x-\pi)(x-2\pi), \quad 0\leqq x\leqq 2\pi$

$$\frac{\operatorname{sen} x}{1^3}+\frac{\operatorname{sen}2x}{2^3}+\frac{\operatorname{sen}3x}{3^3}+\cdots$$

24.32. $f(x) = \tfrac{1}{90}\pi^4-\tfrac{1}{12}\pi^2x^2+\tfrac{1}{12}\pi x^3-\tfrac{1}{48}x^4, \quad 0\leqq x\leqq 2\pi$

$$\frac{\cos x}{1^4}+\frac{\cos 2x}{2^4}+\frac{\cos 3x}{3^4}+\cdots$$

25 LA FUNCIÓN GAMMA

Definición de la función gamma $\Gamma(n)$ para $n > 0$

25.1. $\Gamma(n) = \int_0^\infty t^{n-1} e^{-t}\, dt \qquad n > 0$

Relación de recurrencia

25.2. $\Gamma(n+1) = n\Gamma(n)$

Si $n = 0, 1, 2, \ldots$, es cualquier entero no negativo, se cumple lo siguiente (donde $0! = 1$):

25.3. $\Gamma(n+1) = n!$

Definición de la función gamma para $n < 0$

Para $n < 0$, la función gamma puede definirse mediante la fórmula 25.2, esto es,

25.4. $\Gamma(n) = \dfrac{\Gamma(n+1)}{n}$

Gráfica de la función gamma

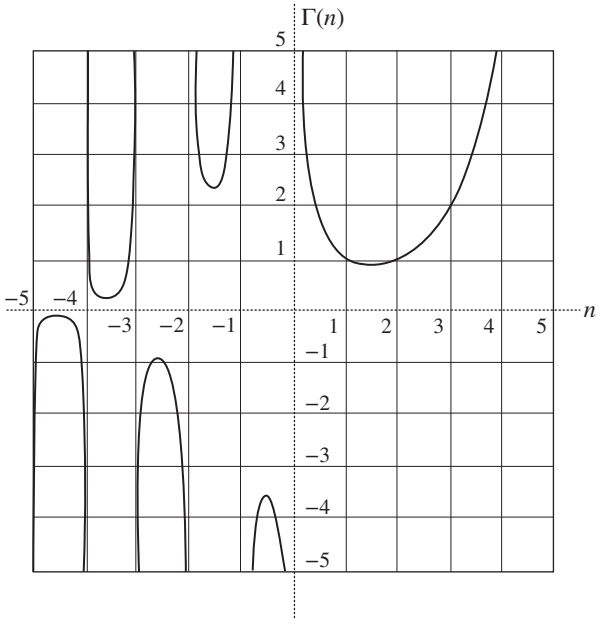


Fig. 25-1

Valores notables de la función gamma

25.5. $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$

25.6. $\Gamma(m+\frac{1}{2}) = \dfrac{1\bullet 3\bullet 5\cdots(2m-1)}{2^m}\sqrt{\pi} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$

25.7. $\Gamma(-m+\frac{1}{2}) = \dfrac{(-1)^m 2^m \sqrt{\pi}}{1\bullet 3\bullet 5\cdots(2m-1)} \qquad m = 1, 2, 3, \ldots$

Relaciones que satisface la función gamma

25.8. $\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \dfrac{\pi}{\operatorname{sen} p\pi}$

25.9. $2^{2x-1}\Gamma(x)\Gamma(x+\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,\Gamma(2x)$

Esta se llama la *fórmula de duplicación*.

25.10. $\Gamma(x)\Gamma\left(x+\dfrac{1}{m}\right)\Gamma\left(x+\dfrac{2}{m}\right)\cdots\Gamma\left(x+\dfrac{m-1}{m}\right) = m^{1/2-mx}(2\pi)^{(m-1)/2}\Gamma(mx)$

Cuando $m = 2$, esta última se reduce a la fórmula 25.9.

Otras definiciones de la función gamma

25.11. $\Gamma(x+1) = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{1\bullet 2\bullet 3\cdots k}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k)} k^x$

25.12. $\dfrac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\prod\limits_{m=1}^{\infty}\left\{\left(1+\dfrac{x}{m}\right)e^{-x/m}\right\}$

Esta es una representación de la función gamma como un producto infinito, donde γ es la *constante de Euler* definida en la fórmula 1.3 de la página 3.

Derivadas de la función gamma

25.13. $\Gamma'(1) = \int_0^{\infty} e^{-x}\ln x\,dx = -\gamma$

25.14. $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} = -\gamma + \left(\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{x}\right) + \left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{x+1}\right) + \cdots + \left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x+n-1}\right) + \cdots$

Aquí γ es nuevamente la constante de Euler.

Expansiones asintóticas de la función gamma

25.15. $$\Gamma(x+1) = \sqrt{2\pi x}\, x^x e^{-x} \left\{ 1 + \frac{1}{12x} + \frac{1}{288x^2} - \frac{139}{51\,840x^3} + \cdots \right\}$$

Esta es la *serie asintótica de Stirling*.

Si $x = n$ es un entero positivo en la fórmula 25.15, entonces una aproximación a $n!$ cuando n es grande (por ejemplo, $n > 10$) *está dada por la fórmula de Stirling*.

25.16. $$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$$

donde ~ significa que la razón de los términos en cada lado se aproxima a 1 conforme $n \to \infty$.

Resultados varios

25.17. $$|\Gamma(ix)|^2 = \frac{\pi}{x \operatorname{senh} \pi x}$$

26 LA FUNCIÓN BETA

Definición de la función beta $B(m, n)$

26.1. $B(m,n) = \int_0^1 t^{m-1}(1-t)^{n-1}\,dt \qquad m > 0,\ n > 0$

Relación de la función beta con la función gamma

26.2. $B(m, n) = \dfrac{\Gamma(m)\Gamma(n)}{\Gamma(m+n)}$

La extensión de la función $B(m, n)$ para $m < 0$, $n < 0$ se obtiene mediante la fórmula 25.4.

Algunos resultados importantes

26.3. $B(m, n) = B(n, m)$

26.4. $B(m, n) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2m-1}\theta \cos^{2n-1}\theta\,d\theta$

26.5. $B(m, n) = \int_0^{\infty} \dfrac{t^{m-1}}{(1+t)^{m+n}}\,dt$

26.6. $B(m, n) = r^n(r+1)^m \int_0^1 \dfrac{t^{m-1}(1-t)^{n-1}}{(r+t)^{m+n}}\,dt$

27 FUNCIONES DE BESSEL

Ecuación diferencial de Bessel

27.1. $x^2y^n + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \quad n \geq 0$

Las soluciones de esta ecuación se llaman *funciones de Bessel de orden n*.

Funciones de Bessel de primer tipo de orden *n*

27.2. $$J_n(x) = \frac{x^n}{2^n\Gamma(n+1)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2\bullet 4(2n+2)(2n+4)} - \cdots\right\}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{n+2k}}{k!\Gamma(n+k+1)}$$

27.3. $$J_{-n}(x) = \frac{x^{-n}}{2^{-n}\Gamma(1-n)}\left\{1 - \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2\bullet 4(2-2n)(4-2n)} - \cdots\right\}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (x/2)^{2k-n}}{k!\Gamma(k+1-n)}$$

27.4. $J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Si $n \neq 0, 1, 2, \ldots, J_n(x)$ y $J_{-n}(x)$ son linealmente independientes.

Si $n \neq 0, 1, 2, \ldots, J_n(x)$ es acotada en $x = 0$ mientras que $J_{-n}(x)$ no es acotada.

Para $n = 0, 1$ se tiene que

27.5. $$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\bullet 4^2} - \frac{x^6}{2^2\bullet 4^2\bullet 6^2} + \cdots$$

27.6. $$J_1(x) = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{2^2\bullet 4} + \frac{x^5}{2^2\bullet 4^2\bullet 6^2} - \frac{x^7}{2^2\bullet 4^2\bullet 6^2\bullet 8} + \cdots$$

27.7. $J_0'(x) = -J_1(x)$

Funciones de Bessel de segundo tipo de orden *n*

27.8. $$Y_n(x) = \begin{cases} \dfrac{J_n(x)\cos n\pi - J_{-n}(x)}{\operatorname{sen} n\pi} & n \neq 0, 1, 2, \ldots \\ \lim\limits_{p \to n} \dfrac{J_p(x)\cos p\pi - J_{-p}(x)}{\operatorname{sen} p\pi} & n = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

También se conoce como la *función de Weber* o la *función de Neumann* [y puede denotarse por $N_n(x)$].

Para $n = 0, 1, 2, \ldots$, al usar la regla de L'Hopital se obtiene

27.9. $$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2)+\gamma\}J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!}{k!}(x/2)^{2k-n} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\frac{(x/2)^{2k+n}}{k!(n+k)!}$$

donde $\gamma = .5772156\ldots$ es la constante de Euler (vea la fórmula 1.20) y

27.10. $$\Phi(p) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{P}, \qquad \Phi(0) = 0$$

Para $n = 0$,

27.11. $$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\{\ln(x/2)+\gamma\}J_0(x) + \frac{2}{\pi}\left\{\frac{x^2}{2^2} - \frac{x^4}{2^2 4^2}\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 4^2 6^2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right) - \cdots\right\}$$

27.12. $$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Para cualquier valor $n \geqq 0$, $J_n(x)$ es acotada en $x = 0$ mientras que $Y_n(x)$ no es acotada.

Solución general de la ecuación diferencial de Bessel

27.13. $y = AJ_n(x) + BJ_{-n}(x)$ $\qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$

27.14. $y = AJ_n(x) + BY_n(x)$ para toda n

27.15. $$y = AJ_n(x) + BJ_n(x)\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)}$$ para toda n

donde A y B son constantes arbitrarias.

Función generadora de $J_n(x)$

27.16. $$e^{x(t-1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n$$

Relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel

27.17. $$J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x) - J_{n-1}(x)$$

27.18. $$J_n'(x) = \tfrac{1}{2}\{J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x)\}$$

27.19. $$xJ_n'(x) = xJ_{n-1}(x) - nJ_n(x)$$

27.20. $$xJ_n'(x) = nJ_n(x) - xJ_{n+1}(x)$$

27.21. $\dfrac{d}{dx}\{x^n J_n(x)\} = x^n J_{n-1}(x)$

27.22. $\dfrac{d}{dx}\{x^{-n} J_n(x)\} = -x^{-n} J_{n+1}(x)$

La función $Y_n(x)$ satisface las mismas relaciones.

Funciones de Bessel de orden igual a la mitad de un entero impar

En este caso las funciones de Bessel pueden escribirse en términos de senos y cosenos.

27.23. $J_{1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\,\operatorname{sen} x$

27.24. $J_{-1/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\,\cos x$

27.25. $J_{3/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\dfrac{\operatorname{sen} x}{x} - \cos x\right)$

27.26. $J_{-3/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left(\dfrac{\cos x}{x} + \operatorname{sen} x\right)$

27.27. $J_{5/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left\{\left(\dfrac{3}{x^2} - 1\right)\operatorname{sen} x - \dfrac{3}{x}\cos x\right\}$

27.28. $J_{-5/2}(x) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi x}}\left\{\dfrac{3}{x}\operatorname{sen} x + \left(\dfrac{3}{x} - 1\right)\cos x\right\}$

Si se utilizan las relaciones de recurrencia, pueden obtenerse otros resultados; por ejemplo, para $Y_{1/2}(x)$, $Y_{3/2}(x)$, … se pueden obtener de la fórmula 27.8.

Funciones de Hankel de primer y segundo tipo de orden *n*

27.29. $H_n^{(1)}(x) = J_n(x) + iY_n(x)$

27.30. $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$

Ecuación diferencial de Bessel modificada

27.31. $x^2y'' + xy' - (x^2 + n^2)y = 0 \qquad n \geqq 0$

Las soluciones de esta ecuación se llaman *funciones modificadas de Bessel de orden n*.

Funciones de Bessel modificadas de primer tipo de orden *n*

27.32. $I_n(x) = i^{-n} J_n(ix) = e^{-n\pi i/2} J_n(ix)$

$$= \frac{x^n}{2^n \Gamma(n+1)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2n+2)} + \frac{x^4}{2 \bullet 4(2n+2)(2n+4)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!\,\Gamma(n+k+1)}$$

27.33. $I_{-n}(x) = i^n J_{-n}(ix) = e^{n\pi i/2} J_{-n}(ix)$

$$= \frac{x^{-n}}{2^{-n} \Gamma(1-n)}\left\{1 + \frac{x^2}{2(2-2n)} + \frac{x^4}{2 \bullet 4(2-2n)(4-2n)} + \cdots\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k-n}}{k!\,\Gamma(k+1-n)}$$

27.34. $I_{-n}(x) = I_n(x) \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Si $n \neq 0, 1, 2, \ldots$, y $I_n(x)$ y $I_{-n}(x)$ son linealmente independientes.
Para $n = 0, 1$, tenemos que

27.35. $$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2} + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \cdots$$

27.36. $$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^2 \cdot 4} + \frac{x^5}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6} + \frac{x^7}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8} + \cdots$$

27.37. $$I_0'(x) = I_1(x)$$

Funciones de Bessel modificadas de segundo tipo de orden *n*

27.38. $$K_n(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sen} n\pi}\{I_{-n}(x) - I_n(x)\} & n \neq 0, 1, 2 \ldots \\ \lim\limits_{p \to n} \dfrac{\pi}{2 \operatorname{sen} p\pi}\{I_{-p}(x) - I_p(x)\} & n = 0, 1, 2 \ldots \end{cases}$$

Para $n = 0, 1, 2 \ldots$, al usar la regla de L'Hospital se obtiene

27.39. $$K_n(x) = (-1)^{n+1}\{\ln(x/2) + \gamma\} I_n(x) + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k (n-k-1)!(x/2)^{2k-n} + \frac{(-1)^n}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\Phi(k) + \Phi(n+k)\}$$

donde $\Phi(p)$ está dada por 27.10.
Para $n = 0$,

27.40. $$K_0(x) = -\{\ln(x/2) + \gamma\} I_0(x) + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 \cdot 4^2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{x^6}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \cdots$$

27.41. $$K_{-n}(x) = K_n(x) \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Solución general de la ecuación de Bessel modificada

27.42. $$y = AI_n(x) + BI_{-n}(x) \qquad n \neq 0, 1, 2, \ldots$$

27.43. $$y = AI_n(x) + BK_n(x) \qquad \text{para toda } n$$

27.44. $$y = AI_n(x) + BI_n(x) \int \frac{dx}{xI_n^2(x)} \qquad \text{para toda } n$$

donde A y B son constantes arbitrarias.

Función generadora de $I_n(x)$

27.45. $$e^{x(t+1/t)/2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(x) t^n$$

Relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel modificadas

27.46. $I_{n+1}(x) = I_{n-1}(x) - \frac{2n}{x} I_n(x)$

27.47. $I_n'(x) = \frac{1}{2}\{I_{n-1}(x) + I_{n+1}(x)\}$

27.48. $xI_n'(x) = xI_{n-1}(x) - nI_n(x)$

27.49. $xI_n'(x) = xI_{n+1}(x) + nI_n(x)$

27.50. $\frac{d}{dx}\{x^n I_n(x)\} = x^n I_{n-1}(x)$

27.51. $\frac{d}{dx}\{x^{-n} I_n(x)\} = x^{-n} I_{n+1}(x)$

27.52. $K_{n+1}(x) = K_{n-1}(x) + \frac{2n}{x} K_n(x)$

27.53. $K_n'(x) = -\frac{1}{2}\{K_{n-1}(x) + K_{n+1}(x)\}$

27.54. $xK_n'(x) = -xK_{n-1}(x) - nK_n(x)$

27.55. $xK_n'(x) = nK_n(x) - xK_{n+1}(x)$

27.56. $\frac{d}{dx}\{x^n K_n(x)\} = -x^n K_{n-1}(x)$

27.57. $\frac{d}{dx}\{x^{-n} K_n(x)\} = -x^{-n} K_{n+1}(x)$

Funciones de Bessel modificadas de orden igual a la mitad de un entero impar

En este caso las funciones de Bessel pueden escribirse en términos de senos y cosenos hiperbólicos.

27.58. $I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{senh} x$

27.59. $I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cosh x$

27.60. $I_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\cosh x - \frac{\operatorname{senh} x}{x}\right)$

27.61. $I_{-3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\operatorname{senh} x - \frac{\cosh x}{x}\right)$

27.62. $I_{5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\left(\frac{3}{x^2} + 1\right)\operatorname{senh} x - \frac{3}{x}\cosh x\right\}$

27.63. $I_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{\left(\frac{3}{x^2} + 1\right)\cosh x - \frac{3}{x}\operatorname{senh} x\right\}$

Si se utiliza la relación de recurrencia 27.46, pueden obtenerse otros resultados; por ejemplo, para $K_{1/2}(x)$, $K_{3/2}(x)$, … se pueden obtener de la fórmula 27.38.

Las funciones *Ber* y *Bei*

Las partes reales e imaginarias de $J_n(xe^{3\pi i/4})$ se denotan por $\operatorname{Ber}_n(x)$ y $\operatorname{Bei}_n(x)$ donde

27.64. $\operatorname{Ber}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\Gamma(n+k+1)} \cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$

27.65. $\operatorname{Bei}_n(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+n}}{k!\Gamma(n+k+1)} \operatorname{sen}\frac{(3n+2k)\pi}{4}$

Si $n = 0$.

27.66. $\operatorname{Ber}(x) = 1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2} + \frac{(x/2)^8}{4!^2} - \cdots$

27.67. $\operatorname{Bei}(x) = (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2} + \frac{(x/2)^{10}}{5!^2} - \cdots$

Las funciones *Ker* y *Kei*

Las partes reales e imaginarias de $e^{-n\pi i/2} K_n(xe^{\pi i/4})$ se denotan por $\mathrm{Ker}_n(x)$ y $\mathrm{Kei}_n(x)$ donde

27.68. $$\mathrm{Ker}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\,\mathrm{Ber}_n(x) + \tfrac{1}{4}\pi\,\mathrm{Bei}_n(x)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\cos\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

27.69. $$\mathrm{Kei}_n(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\,\mathrm{Bei}_n(x) - \tfrac{1}{4}\pi\,\mathrm{Ber}_n(x)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(x/2)^{2k-n}}{k!}\operatorname{sen}\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^{n+2k}}{k!(n+k)!}\{\Phi(k)+\Phi(n+k)\}\operatorname{sen}\frac{(3n+2k)\pi}{4}$$

y Φ está dada por la fórmula 27.10.

Si $n = 0$,

27.70. $$\mathrm{Ker}(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\mathrm{Ber}(x) + \frac{\pi}{4}\mathrm{Bei}(x) + 1 - \frac{(x/2)^4}{2!^2}(1+\tfrac{1}{2}) + \frac{(x/2)^8}{4!^2}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}) - \cdots$$

27.71. $$\mathrm{Kei}(x) = -\{\ln(x/2)+\gamma\}\mathrm{Bei}(x) - \frac{\pi}{4}\mathrm{Ber}(x) + (x/2)^2 - \frac{(x/2)^6}{3!^2}(1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}) + \cdots$$

Ecuación diferencial para las funciones *Ber*, *Bei*, *Ker*, *Kei*

27.72. $$x^2y'' + xy' - (ix^2 + n^2)y = 0$$

La solución general de esta ecuación es

27.73. $$y = A\{Ber_n(x) + i\,\mathrm{Bei}_n(x)\} + B\{\mathrm{Ker}_n(x) + i\,\mathrm{Kei}_n(x)\}$$

Gráfica de las funciones de Bessel

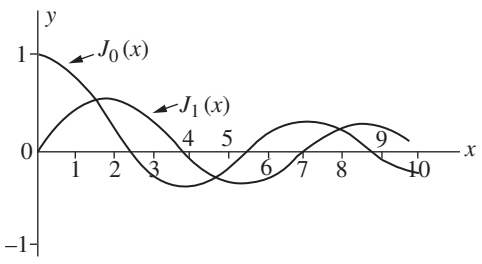


Fig. 27-1

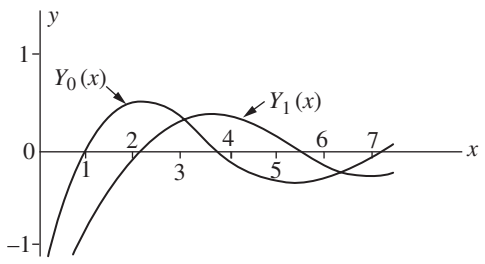


Fig. 27-2

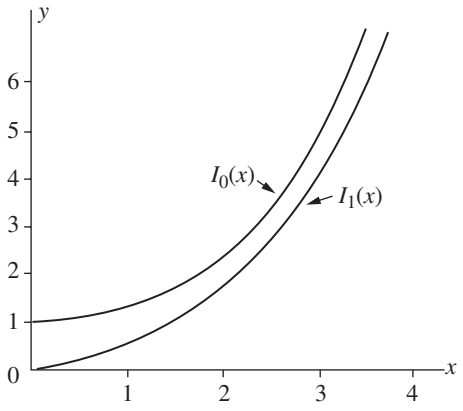


Fig. 27-3

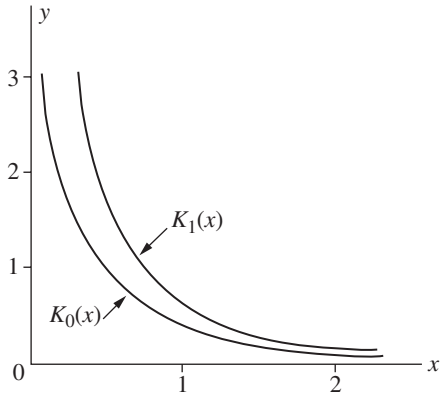


Fig. 27-4

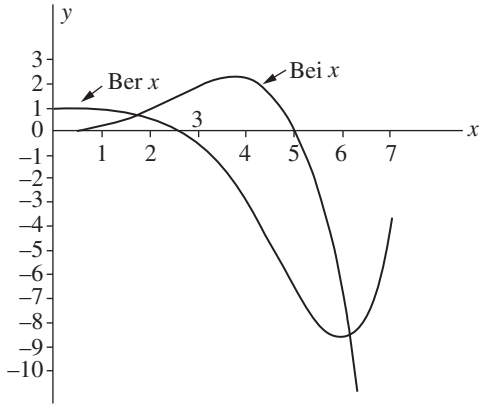


Fig. 27-5

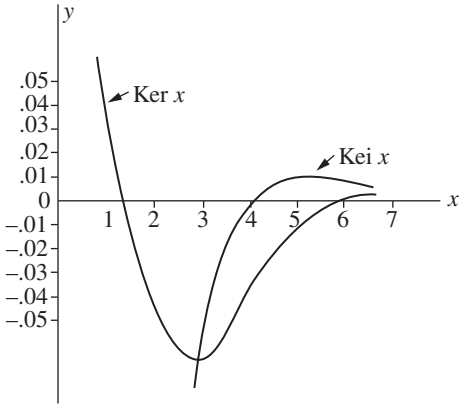


Fig. 27-6

Integrales indefinidas que contienen funciones de Bessel

27.74. $\int xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x)$

27.75. $\int x^2 J_0(x)\,dx = x^2 J_1(x) + xJ_0(x) - \int J_0(x)\,dx$

27.76. $\int x^m J_0(x)\,dx = x^m J_1(x) + (m-1)x^{m-1}J_0(x) - (m-1)^2 \int x^{m-2}J_0(x)\,dx$

27.77. $\int \frac{J_0(x)}{x^2}\,dx = J_1(x) - \frac{J_0(x)}{x} - \int J_0(x)\,dx$

27.78. $\int \frac{J_0(x)}{x^m}\,dx = \frac{J_1(x)}{(m-1)^2 x^{m-2}} - \frac{J_0(x)}{(m-1)x^{m-1}} - \frac{1}{(m-1)^2} \int \frac{J_0(x)}{x^{m-2}}\,dx$

27.79. $\int J_1(x)\,dx = -J_0(x)$

27.80. $\int xJ_1(x)\,dx = -xJ_0(x) + \int J_0(x)\,dx$

27.81. $\int x^m J_1(x)\,dx = -x^m J_0(x) + m \int x^{m-1}J_0(x)\,dx$

27.82. $\int \frac{J_1(x)}{x}dx = -J_1(x) + \int J_0(x)\,dx$

27.83. $\int \frac{J_1(x)}{x^m}dx = -\frac{J_1(x)}{mx^{m-1}} + \frac{1}{m}\int \frac{J_0(x)}{x^{m-1}}dx$

27.84. $\int x^n J_{n-1}(x)\,dx = x^n J_n(x)$

27.85. $\int x^{-n} J_{n+1}(x)\,dx = -x^{-n} J_n(x)$

27.86. $\int x^m J_n(x)\,dx = -x^m J_{n-1}(x) + (m+n-1)\int x^{m-1} J_{n-1}(x)\,dx$

27.87. $\int x J_n(\alpha x) J_n(\beta x)\,dx = \frac{x\{\alpha J_n(\beta x) J_n'(\alpha x) - \beta J_n(\alpha x) J_n'(\beta x)\}}{\beta^2 - \alpha^2}$

27.88. $\int x J_n^2(\alpha x)\,dx = \frac{x^2}{2}\{J_n'(\alpha x)\}^2 + \frac{x^2}{2}\left(1 - \frac{n^2}{\alpha^2 x^2}\right)\{J_n(\alpha x)\}^2$

Los resultados anteriores son válidos al reemplazar $J_n(x)$ por $Y_n(x)$ o, de forma más general, $AJ_n(x) + BY_n(x)$ donde A y B son constantes.

Integrales definidas que contienen funciones de Bessel

27.89. $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(bx)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

27.90. $\int_0^\infty e^{-ax} J_n(bx)\,dx = \frac{(\sqrt{a^2 + b^2} - a)^n}{b^n \sqrt{a^2 + b^2}} \qquad n > -1$

27.91. $\int_0^\infty \cos ax\, J_0(bx)\,dx = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} & a > b \\ 0 & a < b \end{cases}$

27.92. $\int_0^\infty J_n(bx)\,dx = \frac{1}{b}, \qquad n > -1$

27.93. $\int_0^\infty \frac{J_n(bx)}{x}dx = \frac{1}{n}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$

27.94. $\int_0^\infty e^{-ax} J_0(b\sqrt{x})\,dx = \frac{e^{-b^2/4a}}{a}$

27.95. $\int_0^1 x J_n(\alpha x) J_n(\beta x)\,dx = \frac{\alpha J_n(\beta) J_n'(\alpha) - \beta J_n(\alpha) J_n'(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}$

27.96. $\int_0^1 x J_n^2(\alpha x)\,dx = \frac{1}{2}\{J_n'(\alpha)\}^2 + \frac{1}{2}(1 - n^2/\alpha^2)\{J_n(\alpha)\}^2$

27.97. $\int_0^1 x J_0(\alpha x) I_0(\beta x)\,dx = \frac{\beta J_0(\alpha) I_0'(\beta) - \alpha J_0'(\alpha) I_0(\beta)}{\alpha^2 + \beta^2}$

Representaciones integrales de las funciones de Bessel

27.98. $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$

27.99. $J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta$ donde n es un entero

27.100. $J_n(x) = \frac{x^n}{2^n \sqrt{\pi}\, \Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^{\pi} \cos(x \operatorname{sen}\theta) \cos^{2n}\theta\, d\theta, \qquad n > -\frac{1}{2}$

27.101. $Y_0(x) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos(x \cosh u)\, du$

27.102. $I_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cosh(x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{x \operatorname{sen}\theta} d\theta$

Expansiones asintóticas

27.103. $J_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ donde x es grande

27.104. $Y_n(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sen}\left(x - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$ donde x es grande

27.105. $J_n(x) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \left(\frac{ex}{2n}\right)^n$ donde n es grande

27.106. $Y_n(x) \sim -\sqrt{\frac{2}{\pi n}} \left(\frac{ex}{2n}\right)^{-n}$ donde n es grande

27.107 $I_n(x) \sim \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}$ donde x es grande

27.108 $K_n(x) \sim \frac{e^{-x}}{\sqrt{2\pi x}}$ donde x es grande

Series ortogonales de funciones de Bessel

Sean $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ las raíces positivas de $RJ_n(x) + SxJ_n'(x) = 0,\ n > -1$; entonces son válidas las siguientes expansiones en series son válidas bajo las condiciones indicadas.

$S = 0$, $R \neq 0$; es decir, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$, son las raíces positivas de $J_N(x) = 0$

27.109. $f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$

donde

27.110. $A_k = \frac{2}{J_{n+1}^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx$

En particular, si $n = 0$,

27.111. $f(x) = A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + A_3 J_0(\lambda_3 x) + \cdots$

donde

27.112. $A_k = \frac{2}{J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x)\, dx$

R/S > –*n*

27.113. $f(x) = A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + A_3 J_n(\lambda_3 x) + \cdots$

donde

27.114. $A_k = \dfrac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx$

En particular, si $n = 0$.

27.115. $f(x) = A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + A_3 J_0(\lambda_3 x) + \cdots$

donde

27.116. $A_k = \dfrac{2}{J_0^2(\lambda_k) + J_1^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x)\, dx$

Las siguientes fórmulas son válidas para la expansión en serie cuando $S \neq 0$.

R/S = –*n*

27.117. $f(x) = A_0 x^n + A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \cdots$

donde

27.118.
$$\begin{cases} A_0 = 2(n+1) \int_0^1 x^{n+1} f(x)\, dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx \end{cases}$$

En particular, si $n = 0$, de modo que $R = 0$ [es decir, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$ son las raíces positivas de $J_1(x) = 0$],

27.119. $f(x) = A_0 + A_1 J_0(\lambda_1 x) + A_2 J_0(\lambda_2 x) + \cdots$

donde

27.120.
$$\begin{cases} A_0 = 2 \int_0^1 x f(x)\, dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_0^2(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_0(\lambda_k x)\, dx \end{cases}$$

R/S < –*n*

En este caso hay dos raíces puramente imaginarias $\pm i\lambda_0$, además de las raíces positivas $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \ldots$. Se tiene

27.121. $f(x) = A_0 I_n(\lambda_0 x) + A_1 J_n(\lambda_1 x) + A_2 J_n(\lambda_2 x) + \cdots$

donde

27.122.
$$\begin{cases} A_0 = \dfrac{2}{I_n^2(\lambda_0) + I_{n-1}(\lambda_0) I_{n+1}(\lambda_0)} \int_0^1 x f(x) I_n(\lambda_0 x)\, dx \\ A_k = \dfrac{2}{J_n^2(\lambda_k) - J_{n-1}(\lambda_k) J_{n+1}(\lambda_k)} \int_0^1 x f(x) J_n(\lambda_k x)\, dx \end{cases}$$

Resultados varios

27.123. $\cos(x\,\mathrm{sen}\,\theta) = J_0(x) + 2J_2(x)\cos 2\theta + 2J_4(x)\cos 4\theta + \cdots$

27.124. $\mathrm{sen}(x\,\mathrm{sen}\,\theta) = 2J_1(x)\,\mathrm{sen}\,\theta + 2J_3(x)\,\mathrm{sen}\,3\theta + 2J_5(x)\,\mathrm{sen}\,5\theta + \cdots$

27.125. $J_n(x+y) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)J_{n-k}(y) \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$

Esta ecuación se llama *fórmula de adición* de las funciones de Bessel.

27.126. $1 = J_0(x) + 2J_2(x) + \cdots + 2J_{2n}(x) + \cdots$

27.127. $x = 2\{J_1(x) + 3J_3(x) + 5J_5(x) + \cdots + (2n+1)J_{2n+1}(x) + \cdots\}$

27.128. $x^2 = 2\{4J_2(x) + 16J_4(x) + 36J_6(x) + \cdots + (2n)^2 J_{2n}(x) + \cdots\}$

27.129. $\dfrac{xJ_1(x)}{4} = J_2(x) - 2J_4(x) + 3J_6(x) - \cdots$

27.130. $1 = J_0^2(x) + 2J_1^2(x) + 2J_2^2(x) + 2J_3^2(x) + \cdots$

27.131. $J_n''(x) = \frac{1}{4}\{J_{n-2}(x) - 2J_n(x) + J_{n+2}(x)\}$

27.132. $J_n'''(x) = \frac{1}{8}\{J_{n-3}(x) - 3J_{n-1}(x) + 3J_{n+1}(x) - J_{n+3}(x)\}$

Las fórmulas 27.131 y 27.132 pueden generalizarse.

27.133. $J_n'(x)J_{-n}(x) - J_{-n}'J_n(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,n\pi}{\pi x}$

27.134. $J_n(x)J_{-n+1}(x) + J_{-n}(x)J_{n-1}(x) = \dfrac{2\,\mathrm{sen}\,n\pi}{\pi x}$

27.135. $J_{n+1}(x)Y_n(x) - J_n(x)Y_{n+1}(x) = J_n(x)Y_n'(x) - J_n'(x)Y_n(x) = \dfrac{2}{\pi x}$

27.136. $\mathrm{sen}\,x = 2\{J_1(x) - J_3(x) + J_5(x) - \cdots\}$

27.137. $\cos x = J_0(x) - 2J_2(x) + 2J_4(x) - \cdots$

27.138. $\mathrm{senh}\,x = 2\{I_1(x) + I_3(x) + I_5(x) + \cdots\}$

27.139. $\cosh x = I_0(x) + 2\{I_2(x) + I_4(x) + I_6(x) + \cdots\}$

28 FUNCIONES DE LEGENDRE Y ASOCIADAS DE LEGENDRE

Ecuación diferencial de Legendre

28.1. $(1-x^2)y''-2xy'+n(n+1)y=0$

Las soluciones de esta ecuación se llaman *funciones de Legendre de orden n*.

Polinomios de Legendre

Si $n = 0, 1, 2 \ldots$, una solución de la fórmula 28.1 es el polinomio de Legendre $P_n(x)$ dado por la *fórmula de Rodrigues*:

28.2. $P_n(x)=\dfrac{1}{2^n n!}\dfrac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$

Polinomios especiales de Legendre

28.3. $P_0(x)=1$

28.4. $P_1(x)=x$

28.5. $P_2(x)=\frac{1}{2}(3x^2-1)$

28.6. $P_3(x)=\frac{1}{2}(5x^3-3x)$

28.7. $P_4(x)=\frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

28.8. $P_5(x)=\frac{1}{8}(63x^5-70x^3+15x)$

28.9. $P_6(x)=\frac{1}{16}(231x^6-315x^4+105x^2-5)$

28.10. $P_7(x)=\frac{1}{16}(429x^7-693x^5+315x^3-35x)$

Polinomios de Legendre en términos de θ, donde $x = \cos\theta$

28.11. $P_0(\cos\theta)=1$

28.12. $P_1(\cos\theta)=\cos\theta$

28.13. $P_2(\cos\theta)=\frac{1}{4}(1+3\cos 2\theta)$

28.14. $P_3(\cos\theta)=\frac{1}{8}(3\cos\theta+5\cos 3\theta)$

28.15. $P_4(\cos\theta)=\frac{1}{64}(9+20\cos 2\theta+35\cos 4\theta)$

28.16. $P_5(\cos\theta) = \frac{1}{128}(30\cos\theta + 35\cos 3\theta + 63\cos 5\theta)$

28.17. $P_6(\cos\theta) = \frac{1}{512}(50 + 105\cos 2\theta + 126\cos 4\theta + 231\cos 6\theta)$

28.18. $P_7(\cos\theta) = \frac{1}{1024}(175\cos\theta + 189\cos 3\theta + 231\cos 5\theta + 429\cos 7\theta)$

Función generadora de los polinomios de Legendre

28.19. $$\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)t^n$$

Relaciones de recurrencia de los polinomios de Legendre

28.20. $(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)x\,P_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0$

28.21. $P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n(x)$

28.22. $xP'_n(x) - P'_{n-1}(x) = nP_n(x)$

28.23. $P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$

28.24. $(x^2-1)P'_n(x) - nxP_n(x) - nP_{n-1}(x)$

Ortogonalidad de los polinomios de Legendre

28.25. $\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,dx = 0 \quad m \neq n$

28.26. $$\int_{-1}^{1} \{P_n(x)\}^2\,dx = \frac{2}{2n+1}$$

Por la fórmula 28.25, $P_m(x)$ y $P_n(x)$ se dicen *ortogonales* en $-1 \leqq x \leqq 1$.

Serie ortogonal de los polinomios de Legendre

28.27. $f(x) = A_0P_0(x) + A_1P_1(x) + A_2P_2(x) + \cdots$

donde

28.28. $$A_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx$$

Resultados notables que contienen polinomios de Legendre

28.29. $P_n(1) = 1$

28.30. $P_n(-1) = (-1)^n$

28.31. $P_n(-x) = (-1)^n P_n(x)$

28.32. $$P_n(0) = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ (-1)^{n/2} \dfrac{1 \bullet 3 \bullet 5 \cdots (n-1)}{2 \bullet 4 \bullet 6 \cdots n} & n \text{ par} \end{cases}$$

28.33. $$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (x + \sqrt{x^2 - 1} \cos\phi)^n \, d\phi$$

28.34. $$\int P_n(x)\, dx = \frac{P_{n+1}(x) - P_{n-1}(x)}{2n+1}$$

28.35. $|P_n(x)| \leqq 1$

28.36. $$P_n(x) = \frac{1}{2^{n+1} \pi i} \oint_c \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

donde C es una curva simple y cerrada que contiene al punto x.

Solución general de la ecuación de Legendre

La solución general de la ecuación de Legendre es

28.37. $y = AU_n(x) + BV_n(x)$

donde

28.38. $$U_n(x) = 1 - \frac{n(n+1)}{2!} x^2 + \frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4!} x^4 - \cdots$$

28.39. $$V_n(x) = x - \frac{(n-1)(n+2)}{3!} x^3 + \frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5!} x^5 - \cdots$$

Estas series son convergentes para $-1 < x < 1$.

Funciones de Legendre de segundo tipo

Si $n = 0, 1, 2, \ldots$ una de las series 28.38 o 28.39 es finita. En tal caso

28.40. $$P_n(x) = \begin{cases} U_n(x)/U_n(1) & n = 0, 2, 4, \ldots \\ V_n(x)/V_n(1) & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

donde

28.41. $$U_n(1) = (-1)^{n/2} 2^n \left[\left(\frac{n}{2} \right)! \right]^2 \Big/ n! \qquad n = 0, 2, 4, \ldots$$

28.42. $V_n(1) = (-1)^{(n-1)/2} 2^{n-1} \left[\left(\frac{n-1}{2}\right)!\right]^2 \Big/ n! \qquad n = 1, 3, 5, \ldots$

Cuando se tiene una serie infinita junto con una constante multiplicativa adecuada, la serie se denota por $Q_n(x)$ y se llama *función de Legendre de segundo tipo de orden n*. Definimos

28.43. $$Q_n(x) = \begin{cases} U_n(1)V_n(x) & n = 0, 2, 4, \ldots \\ -V_n(1)U_n(x) & n = 1, 3, 5, \ldots \end{cases}$$

Funciones especiales de Legendre de segundo tipo

28.44. $Q_0(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

28.45. $Q_1(x) = \frac{x}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - 1$

28.46. $Q_2(x) = \frac{3x^2-1}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{3x}{2}$

28.47. $Q_3(x) = \frac{5x^3-3x}{4}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) - \frac{5x^2}{2} + \frac{2}{3}$

Las funciones $Q_n(x)$ satisfacen relaciones de recurrencia análogas a las fórmulas 28.20 a 28.24.
Mediante estas fórmulas, la solución general de la ecuación de Legendre puede escribirse como

28.48. $y = AP_n(x) + BQ_n(x)$

Ecuación diferencial de Legendre asociada

28.49. $(1-x^2)y'' - 2xy' + \left\{n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right\} y = 0$

Las soluciones de esta ecuación se llaman *ecuaciones asociadas de Legendre*. Nos restringimos al caso cuando m y n son enteros no negativos.

Funciones asociadas de Legendre de primer tipo

28.50. $P_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n(x) = \frac{(1-x^2)^{m/2}}{2^n n!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} (x^2-1)^n$

donde $P_n(x)$ son los polinomios de Legendre (vea la página 164). Tenemos que

28.51. $P_n^0(x) = P_n(x)$

28.52. $P_n^m(x) = 0 \qquad \text{si } m > n$

Funciones especiales asociadas de Legendre de primer tipo

28.53. $P_1^1(x) = (1-x^2)^{1/2}$

28.54. $P_2^1(x) = 3x(1-x^2)^{1/2}$

28.55. $P_2^2(x) = 3(1-x^2)$

28.56. $P_3^1(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)(1-x^2)^{1/2}$

28.57. $P_3^2(x) = 15x(1-x^2)$

28.58. $P_3^3(x) = 15(1-x^2)^{3/2}$

Función generadora de $P_n^m(x)$

28.59. $$\frac{(2m)!(1-x^2)^{m/2}t^m}{2^m m!(1-2tx+t^2)^{m+1/2}} = \sum_{n=m}^{\infty} P_n^m(x)t^n$$

Relaciones de recurrencia

28.60. $$(n+1-m)P_{n+1}^m(x) - (2n+1)x\,P_n^m(x) + (n+m)P_{n-1}^m(x) = 0$$

28.61. $$P_n^{m+2}(x) - \frac{2(m+1)x}{(1-x^2)^{1/2}}P_n^{m+1}(x) + (n-m)(n+m+1)P_n^m(x) = 0$$

Ortogonalidad de $P_n^m(x)$

28.62. $$\int_{-1}^{1} P_l^m(x)P_1^m(x)\,dx = 0 \qquad \text{si } n \neq l$$

28.63. $$\int_{-1}^{1} \left\{P_n^m(x)\right\}^2 dx = \frac{2}{2n+1}\frac{(n+m)!}{(n-m)!}$$

Serie ortogonal

28.64. $$f(x) = A_m P_m^m(x) + A_{m+1}P_{m+1}^m(x) + A_{m+2}P_{m+2}^m(x) + \cdots$$

donde

28.65. $$A_k = \frac{2k+1}{2}\frac{(k-m)!}{(k+m)!}\int_{-1}^{1} f(x)P_k^m(x)\,dx$$

Funciones asociadas de Legendre de segundo tipo

28.66. $$Q_n^m(x) = (1-x^2)^{m/2}\frac{d^m}{dx^m}Q_n(x)$$

donde $Q_n(x)$ son las funciones de Legendre de segundo tipo (vea la página 166).

Estas funciones son no acotadas en $x = \pm 1$, mientras que las funciones $P_n^m(x)$ sí lo son.

Las funciones $Q_n^m(x)$ satisfacen la misma relación de recurrencia que las funciones $P_n^m(x)$ (vea las fórmulas 28.60 y 28.61).

Solución general de ecuaciones asociadas de Legendre

28.67. $$y = AP_n^m(x) + BQ_n^m(x)$$

29 POLINOMIOS DE HERMITE

Ecuación diferencial de Hermite

29.1. $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

Polinomios de Hermite

Si $n = 0, 1, 2, \ldots$, una solución de la ecuación de Hermite es el polinomio de Hermite $H_n(x)$, dado por la *fórmula de Rodrigues*.

29.2. $H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \dfrac{d^n}{dx^n}(e^{-x^2})$

Polinomios especiales de Hermite

29.3. $H_0(x) = 1$

29.4. $H_1(x) = 2x$

29.5. $H_2(x) = 4x^2 - 2$

29.6. $H_3(x) = 8x^3 - 12x$

29.7. $H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12$

29.8. $H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x$

29.9. $H_6(x) = 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120$

29.10. $H_7(x) = 128x^7 - 1344x^5 + 3360x^3 - 1\,680x$

Función generadora

29.11. $e^{2tx-t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{H_n(x)t^n}{n!}$

Relaciones de recurrencia

29.12. $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

29.13. $H_n'(x) = 2nH_{n-1}(x)$

Ortogonalidad de los polinomios de Hermite

29.14. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_m(x)H_n(x)dx = 0 \qquad m \neq n$

29.15. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \{H_n(x)\}^2 dx = 2^n n!\sqrt{\pi}$

Serie ortogonal

29.16. $f(x) = A_0 H_0(x) + A_1 H_1(x) + A_2 H_2(x) + \cdots$

donde

29.17. $A_k = \dfrac{1}{2^k k! \sqrt{\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f(x) H_k(x) dx$

Resultados notables

29.18. $H_n(x) = (2x)^n - \dfrac{n(n-1)}{1!}(2x)^{n-2} + \dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!}(2x)^{n-4} - \cdots$

29.19. $H_n(-x) = (-1)^n H_n(x)$

29.20. $H_{2n-1}(0) = 0$

29.21. $H_{2n}(0) = (-1)^n 2^n \bullet 1 \bullet 3 \bullet 5 \cdots (2n-1)$

29.22. $\displaystyle\int_0^x H_n(t)\, dt = \frac{H_{n+1}(x)}{2(n+1)} - \frac{H_{n+1}(0)}{2(n+1)}$

29.23. $\dfrac{d}{dx}\{e^{-x^2} H_n(x)\} = -e^{-x^2} H_{n+1}(x)$

29.24. $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2} H_n(t)\, dt = H_{n-1}(0) - e^{-x^2} H_{n-1}(x)$

29.25. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} t^n e^{-t^2} H_n(xt) dt = \sqrt{\pi}\, n!\, P_n(x)$

29.26. $H_n(x+y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{n/2}} \binom{n}{k} H_k(x\sqrt{2}) H_{n-k}(y\sqrt{2})$

Esta ecuación se llama *fórmula de adición* de los polinomios de Hermite.

29.27. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{H_k(x) H_k(y)}{2^k k!} = \frac{H_{n+1}(x) H_n(y) - H_n(x) H_{n+1}(y)}{2^{n+1} n! (x-y)}$

30 POLINOMIOS DE LAGUERRE Y ASOCIADOS DE LAGUERRE

Ecuación diferencial de Laguerre

30.1. $xy'' + (1-x)y' + ny = 0$

Polinomios de Laguerre

Si $n = 0, 1, 2, \ldots$, una solución de la ecuación de Laguerre es el polinomio de Laguerre $L_n(x)$, dado por la *fórmula de Rodrigues*.

30.2. $L_n(x) = e^x \dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$

Polinomios especiales de Laguerre

30.3. $L_0(x) = 1$

30.4. $L_1(x) = -x + 1$

30.5. $L_2(x) = x^2 - 4x + 2$

30.6. $L_3(x) = -x^3 + 9x^2 - 18x + 6$

30.7. $L_4(x) = x^4 - 16x^3 + 72x^2 - 96x + 24$

30.8. $L_5(x) = -x^5 + 25x^4 - 200x^3 + 600x^2 - 600x + 120$

30.9. $L_6(x) = x^6 - 36x^5 + 450x^4 - 2\,400x^3 + 5\,400x^2 - 4\,320x + 720$

30.10. $L_7(x) = -x^7 + 49x^6 - 882x^5 + 7\,350x^4 - 29\,400x^3 + 52\,920x^2 - 35\,280x + 5\,040$

Función generadora

30.11. $\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{L_n(x)t^n}{n!}$

Relaciones de recurrencia

30.12. $L_{n+1}(x)-(2n+1-x)L_n(x)+n^2L_{n-1}(x)=0$

30.13. $L_n'(x)-nL_{n-1}'(x)+nL_{n-1}(x)=0$

30.14. $xL_n'(x)=nL_n(x)-n^2L_{n-1}(x)$

Ortogonalidad de los polinomios de Laguerre

30.15. $\int_0^\infty e^{-x}L_m(x)L_n(x)\,dx=0 \qquad m\neq n$

30.16. $\int_0^\infty e^{-x}\{L_n(x)\}^2\,dx=(n!)^2$

Serie ortogonal

30.17. $f(x)=A_0L_0(x)+A_1L_1(x)+A_2L_2(x)+\cdots$

donde

30.18. $A_k=\dfrac{1}{(k!)^2}\int_0^\infty e^{-x}f(x)L_k(x)\,dx$

Resultados notables

30.19. $L_n(0)=n!$

30.20. $\int_0^x L_n(t)\,dt=L_n(x)-\dfrac{L_{n+1}(x)}{n+1}$

30.21. $L_n(x)=(-1)^n\left\{x^n-\dfrac{n^2x^{n-1}}{1!}+\dfrac{n^2(n-1)^2x^{n-2}}{2!}-\cdots(-1)^n n!\right\}$

30.22. $\int_0^\infty x^pe^{-x}L_n(x)\,dx=\begin{cases}0 & \text{si } p<n\\ (-1)^n(n!)^2 & \text{si } p=n\end{cases}$

30.23. $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{L_k(x)L_k(y)}{(k!)^2}=\dfrac{L_n(x)L_{n+1}(y)-L_{n+1}(x)L_n(y)}{(n!)^2(x-y)}$

30.24. $\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^kL_k(x)}{(k!)^2}=e^tJ_0(2\sqrt{xt})$

30.25. $L_n(x)=\int_0^\infty u^ne^{x-u}J_0(2\sqrt{xu})\,du$

Ecuación diferencial asociada de Laguerre

30.26. $xy'' + (m+1-x)y' + (n-m)y = 0$

Polinomios asociados de Laguerre

Las soluciones de la fórmula 30.26 para enteros no negativos m y n, están dadas por los polinomios asociados de Laguerre:

30.27. $L_n^m(x) = \dfrac{d^m}{dx^m} L_n(x)$

donde $L_n(x)$ son los polinomios de Laguerre (vea la página 171).

30.28. $L_n^0(x) = L_n(x)$

30.29. $L_n^m(x) = 0 \qquad \text{si } m > n$

Polinomios asociados de Laguerre especiales

30.30. $L_1^1(x) = -1$

30.31. $L_2^1(x) = 2x - 4$

30.32. $L_2^2(x) = 2$

30.33. $L_3^1(x) = -3x^2 + 18x - 18$

30.34. $L_3^2(x) = -6x + 18$

30.35. $L_3^3(x) = -6$

30.36. $L_4^1(x) = 4x^3 - 48x^2 + 144x - 96$

30.37. $L_4^2(x) = 12x^2 - 96x + 144$

30.38. $L_4^3(x) = 24x - 96$

30.39. $L_4^4(x) = 24$

Función generadora de $L_n^m(x)$

30.40. $\dfrac{(-1)^m t^m}{(1-t)^{m+1}} e^{-xt/(1-t)} = \sum_{n=m}^{\infty} \dfrac{L_n^m(x)}{n!} t^n$

Relaciones de recurrencia

30.41. $\dfrac{n-m+1}{n+1} L_{n+1}^m(x) + (x+m-2n-1)L_n^m(x) + n^2 L_{n-1}^m(x) = 0$

30.42. $\dfrac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = L_n^{m+1}(x)$

30.43. $\dfrac{d}{dx}\{x^m e^{-x} L_n^m(x)\} = (m-n-1)x^{m-1} e^{-x} L_n^{m-1}(x)$

30.44. $x\dfrac{d}{dx}\{L_n^m(x)\} = (x-m)L_n^m(x) + (m-n-1)L_n^{m-1}(x)$

Ortogonalidad

30.45. $\int_0^\infty x^m e^{-x} L_n^m(x) L_p^m(x)\,dx = 0 \quad p \neq n$

30.46. $\int_0^\infty x^m e^{-x} \{L_n^m(x)\}^2\,dx = \dfrac{(n!)^3}{(n-m)!}$

Serie ortogonal

30.47. $f(x) = A_m L_m^m(x) + A_{m+1} L_{m+1}^m(x) + A_{m+2} L_{m+2}^m(x) + \cdots$

donde

30.48. $A_k = \dfrac{(k-m)!}{(k!)^3} \int_0^\infty x^m e^{-x} L_k^m(x) f(x)\,dx$

Resultados notables

30.49. $L_n^m(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{(n-m)!} \left\{ x^{n-m} - \dfrac{n(n-m)}{1!} x^{n-m-1} + \dfrac{n(n-1)(n-m)(n-m-1)}{2!} x^{n-m-2} + \cdots \right\}$

30.50. $\int_0^\infty x^{m+1} e^{-x} \{L_n^m(x)\}^2\,dx = \dfrac{(2n-m+1)(n!)^3}{(n-m)!}$

31 POLINOMIOS DE CHEBYSHEV

Ecuación diferencial de Chebyshev

31.1. $(1-x^2)y'' - xy' + n^2 y = 0 \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$

Polinomios de Chebyshev de primer tipo

Una solución de 31.1 está dada por

31.2. $T_n(x) = \cos(n\cos^{-1}x) = x^n - \binom{n}{2}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n}{4}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$

Polinomios especiales de Chebyshev de primer tipo

31.3. $T_0(x) = 1$

31.4. $T_1(x) = x$

31.5. $T_2(x) = 2x^2 - 1$

31.6. $T_3(x) = 4x^3 - 3x$

31.7. $T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

31.8. $T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$

31.9. $T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$

31.10. $T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$

Función generadora de $T_n(x)$

31.11. $\dfrac{1-tx}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^n$

Valores notables

31.12. $T_n(-x) = (-1)^n T_n(x)$

31.13. $T_n(1) = 1$

31.14. $T_n(-1) = (-1)^n$

31.15. $T_{2n}(0) = (-1)^n$

31.16. $T_{2n+1}(0) = 0$

Relaciones de recurrencia de $T_n(x)$

31.17. $T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x) = 0$

Ortogonalidad

31.18. $\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx = 0 \qquad m \neq n$

31.19. $\int_{-1}^{1} \frac{\{T_n(x)\}^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{cases} \pi & \text{si } n = 0 \\ \pi/2 & \text{si } n = 1, 2, \ldots \end{cases}$

Serie ortogonal

31.20. $f(x) = \frac{1}{2}A_0T_0(x) + A_1T_1(x) + A_2T_2(x) + \cdots$

donde

31.21. $A_k = \frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{f(x)T_k(x)}{\sqrt{1-x^2}}dx$

Polinomios de Chebyshev de segundo tipo

31.22. $U_n(x) = \frac{\text{sen}\{(n+1)\cos^{-1}x\}}{\text{sen}(\cos^{-1}x)}$

$$= \binom{n+1}{1}x^n - \binom{n+1}{3}x^{n-2}(1-x^2) + \binom{n+1}{5}x^{n-4}(1-x^2)^2 - \cdots$$

Polinomios especiales de Chebyshev de segundo tipo

31.23. $U_0(x) = 1$

31.24. $U_1(x) = 2x$

31.25. $U_2(x) = 4x^2 - 1$

31.26. $U_3(x) = 8x^3 - 4x$

31.27. $U_4(x) = 16x^4 - 12x^2 + 1$

31.28. $U_5(x) = 32x^5 - 32x^3 + 6x$

31.29. $U_6(x) = 64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1$

31.30. $U_7(x) = 128x^7 - 192x^5 + 80x^3 - 8x$

Función generadora de $U_n(x)$

31.31. $\frac{1}{1-2tx+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n$

Valores notables

31.32. $U_n(-x) = (-1)^n U_n(x)$

31.33. $U_n(1) = n+1$

31.34. $U_n(-1) = (-1)^n(n+1)$

31.35. $U_{2n}(0) = (-1)^n$

31.36. $U_{2n+1}(0) = 0$

Relación de recurrencia de $U_n(x)$

31.37. $U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x) = 0$

Ortogonalidad

31.38. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, U_m(x) U_n(x)\, dx = 0 \qquad m \neq n$

31.39. $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, \{U_n(x)\}^2\, dx = \frac{\pi}{2}$

Serie ortogonal

31.40. $f(x) = A_0 U_0(x) + A_1 U_1(x) + A_2 U_2(x) + \cdots$

donde

31.41. $A_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\, f(x) U_k(x)\, dx$

Relaciones entre $T_n(x)$ y $U_n(x)$

31.42. $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x)$

31.43. $(1-x^2)U_{n-1}(x) = xT_n(x) - T_{n+1}(x)$

31.44. $U_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_{n+1}(v)\, dv}{(v-x)\sqrt{1-v^2}}$

31.45. $T_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-v^2}\, U_{n-1}(v)}{x-v} dv$

Solución general de la ecuación diferencial de Chebyshev

31.46. $y = \begin{cases} AT_n(x) + B\sqrt{1-x^2}\, U_{n-1}(x) & \text{si } n = 1, 2, 3, \ldots \\ A + B \operatorname{sen}^{-1} x & \text{si } n = 0 \end{cases}$

32 FUNCIONES HIPERGEOMÉTRICAS

Ecuación diferencial hipergeométrica

32.1. $x(1-x)y'' + \{c-(a+b+1)x\}y' - aby = 0$

Funciones hipergeométricas

Una solución de 32.1 está dada por

32.2. $F(a,b;c;x) = 1 + \dfrac{a \cdot b}{1 \cdot c}x + \dfrac{a(a+1)b(b+1)}{1 \cdot 2 \cdot c(c+1)}x^2 + \dfrac{a(a+1)(a+2)b(b+1)(b+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot c(c+1)(c+2)}x^3 + \cdots$

Si a, b, c son reales tales que $-1 < x < 1$, entonces la serie converge para $c - (a + b) > -1$.

Casos notables

32.3. $F(-p,1;1;-x) = (1+x)^p$

32.4. $F(1,1;2;-x) = [\ln(1+x)]/x$

32.5. $\lim_{n\to\infty} F(1,n;1;x/n) = e^x$

32.6. $F(\frac{1}{2},-\frac{1}{2};\frac{1}{2};\operatorname{sen}^2 x) = \cos x$

32.7. $F(\frac{1}{2},1;1;\operatorname{sen}^2 x) = \sec x$

32.8. $F(\frac{1}{2},\frac{1}{2};\frac{3}{2};x^2) = (\operatorname{sen}^{-1} x)/x$

32.9. $F(\frac{1}{2},1;\frac{3}{2};-x^2) = (\tan^{-1} x)/x$

32.10. $F(1,p;p;x) = 1/(1-x)$

32.11. $F(n+1,-n;1;(1-x)/2) = P_n(x)$

32.12. $F(n,-n;\frac{1}{2};(1-x)/2) = T_n(x)$

Solución general de la ecuación hipergeométrica

Si c, $a-b$ y $c-a-b$ no son enteros, entonces la solución general válida para $|x| < 1$ es

32.13. $y = AF(a,b;c;x) + Bx^{1-c}F(a-c+1,b-c+1;2-c;x)$

Propiedades varias

32.14. $F(a,b;c;1) = \dfrac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)}$

32.15. $\dfrac{d}{dx}F(a,b;c;x) = \dfrac{ab}{c}F(a+1,b+1;c+1;x)$

32.16. $F(a,b;c;x) = \dfrac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)}\int_0^1 u^{b-1}(1-u)^{c-b-1}(1-ux)^{-a}\,du$

32.17. $F(a,b;c;x) = (1-x)^{c-a-b}F(c-a,c-b;c;x)$

33 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Definición de la transformada de Laplace de $F(t)$

33.1. $\mathscr{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t)\,dt = f(s)$

En general, $f(s)$ existe para $s > \alpha$ donde α una constante. $\mathscr{L}$ se llama el *operador de la transformada de Laplace*.

Definición de la transformada inversa de Laplace de $f(s)$

Si $\mathscr{L}\{F(t)\} = f(s)$, decimos que $F(t) = \mathscr{L}^{-1}\{f(s)\}$ es la *transformada inversa de Laplace* de $f(s)$. $\mathscr{L}^{-1}$ se llama el *operador de la transformada inversa de Laplace*.

Fórmula compleja de la transformada inversa de Laplace

La transformada inversa de Laplace de $f(s)$ puede encontrarse de manera directa mediante el uso de métodos de la teoría de variable compleja. El resultado es

33.2. $$F(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s)\,ds = \frac{1}{2\pi i}\lim_{T\to\infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} f(s)\,ds$$

donde c se escoge de forma que todos los puntos singulares de $f(s)$ se hallen a la izquierda de la recta $\mathrm{Re}\{s\} = c$ en el plano complejo s.

Tabla de propiedades generales de las transformadas de Laplace

	$f(s)$	$F(t)$
33.3.	$af_1(s)+bf_2(s)$	$aF_1(t)+bF_2(t)$
33.4.	$f(s/a)$	$aF(at)$
33.5.	$f(s-a)$	$e^{at}F(t)$
33.6.	$e^{-as}f(s)$	$\mathcal{U}(t-a)=\begin{cases} F(t-a) & t>a \\ 0 & t<a \end{cases}$
33.7.	$sf(s)-F(0)$	$F'(t)$
33.8.	$s^2f(s)-sF(0)-F'(0)$	$F''(t)$
33.9.	$s^nf(s)-s^{n-1}F(0)-s^{n-2}F'(0)-\cdots-F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
33.10.	$f'(s)$	$-tF(t)$
33.11.	$f''(s)$	$t^2F(t)$
33.12.	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^nt^nF(t)$
33.13.	$\dfrac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u)\,du$
33.14.	$\dfrac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t\cdots\int_0^t F(u)\,du^n=\int_0^t\dfrac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!}F(u)\,du$
33.15.	$f(s)g(s)$	$\int_0^t F(u)G(t-u)\,du$

	$f(s)$	$F(t)$
33.16.	$\int_s^\infty f(u)\,du$	$\dfrac{F(t)}{t}$
33.17.	$\dfrac{1}{1-e^{-sT}}\int_0^T e^{-su}F(u)\,du$	$F(t)=F(t+T)$
33.18.	$\dfrac{f(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}\int_0^\infty e^{-u^2/4t}F(u)\,du$
33.19.	$\dfrac{1}{s}f\left(\dfrac{1}{s}\right)$	$\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})F(u)du$
33.20.	$\dfrac{1}{s^{n+1}}f\left(\dfrac{1}{s}\right)$	$t^{n/2}\int_0^\infty u^{-n/2}J_n(2\sqrt{ut})F(u)du$
33.21.	$\dfrac{f(s+1/s)}{s^2+1}$	$\int_0^t J_0(2\sqrt{u(t-u)})F(u)du$
33.22.	$\dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\int_0^\infty u^{-3/2}e^{-s^2/4u}f(u)\,du$	$F(t^2)$
33.23.	$\dfrac{f(\ln s)}{s\ln s}$	$\int_0^\infty \dfrac{t^uF(u)}{\Gamma(u+1)}du$
33.24.	$\dfrac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s)$ es un polinomio de grado menor a n, $Q(s)=(s-\alpha_1)(s-\alpha_2)\ldots(s-\alpha_n)$ donde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ son todas distintas.	$\sum_{k=1}^{n}\dfrac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)}\,e^{\alpha_k t}$

Tabla de algunas transformadas de Laplace

	$f(s)$	$F(t)$
33.25.	$\frac{1}{s}$	1
33.26.	$\frac{1}{s^2}$	t
33.27.	$\frac{1}{s^n} \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0!=1$
33.28.	$\frac{1}{s^n} \quad n>0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
33.29.	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
33.30.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n=1,2,3,\ldots$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0!=1$
33.31.	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n>0$	$\frac{t^{n-1}e^{at}}{\Gamma(n)}$
33.32.	$\frac{1}{s^2+a^2}$	$\frac{\operatorname{sen} at}{a}$
33.33.	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$
33.34.	$\frac{1}{(s-b)^2+a^2}$	$\frac{e^{bt}\operatorname{sen} at}{a}$
33.35.	$\frac{s-b}{(s-b)^2+a^2}$	$e^{bt}\cos at$
33.36.	$\frac{1}{s^2-a^2}$	$\frac{\operatorname{senh} at}{a}$
33.37.	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$
33.38.	$\frac{1}{(s-b)^2-a^2}$	$\frac{e^{bt}\operatorname{senh} at}{a}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.39.	$\dfrac{s-b}{(s-b)^2-a^2}$	$e^{bt}\cosh at$
33.40.	$\dfrac{1}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{e^{bt}-e^{at}}{b-a}$
33.41.	$\dfrac{s}{(s-a)(s-b)} \quad a \neq b$	$\dfrac{be^{bt}-ae^{at}}{b-a}$
33.42.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at - at\cos at}{2a^3}$
33.43.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{sen} at}{2a}$
33.44.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{sen} at + at\cos at}{2a}$
33.45.	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^2}$	$\cos at - \frac{1}{2}at\operatorname{sen} at$
33.46.	$\dfrac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}$	$t\cos at$
33.47.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{at\cosh at - \operatorname{senh} at}{2a^3}$
33.48.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{t\operatorname{senh} at}{2a}$
33.49.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^2}$	$\dfrac{\operatorname{senh} at + at\cosh at}{2a}$
33.50.	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^2}$	$\cosh at + \frac{1}{2}at\operatorname{senh} at$
33.51.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$t\cosh at$
33.52.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen} at - 3at\cos at}{8a^5}$
33.53.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t\operatorname{sen} at - at^2\cos at}{8a^3}$
33.54.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(1+a^2t^2)\operatorname{sen} at - at\cos at}{8a^3}$
33.55.	$\dfrac{s^3}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{sen} at + at^2\cos at}{8a}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.56.	$\dfrac{s^4}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(3-a^2t^2)\operatorname{sen} at+5at\cos at}{8a}$
33.57.	$\dfrac{s^5}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{(8-a^2t^2)\cos at\ -7at\operatorname{sen} at}{8}$
33.58.	$\dfrac{3s^2-a^2}{(s^2+a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{sen} at}{2a}$
33.59.	$\dfrac{s^3-3a^2s}{(s^2+a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cos at$
33.60.	$\dfrac{s^4-6a^2s^2+a^4}{(s^2+a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cos at$
33.61.	$\dfrac{s^3-a^2s}{(s^2+a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{sen} at}{24a}$
33.62.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh} at-3at\cosh at}{8a^5}$
33.63.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at^2\cosh at-t\operatorname{senh} at}{8a^3}$
33.64.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{at\cosh at+(a^2t^2-1)\operatorname{senh} at}{8a^3}$
33.65.	$\dfrac{s^3}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{3t\operatorname{senh} at+at^2\cosh at}{8a}$
33.66.	$\dfrac{s^4}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(3+a^2t^2)\operatorname{senh} at+5at\cosh at}{8a}$
33.67.	$\dfrac{s^5}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{(8+a^2t^2)\cosh at+7at\operatorname{senh} at}{8}$
33.68.	$\dfrac{3s^2+a^2}{(s^2-a^2)^3}$	$\dfrac{t^2\operatorname{senh} at}{2a}$
33.69.	$\dfrac{s^3+3a^2s}{(s^2-a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2\cosh at$
33.70.	$\dfrac{s^4+6a^2s^2+a^4}{(s^2-a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3\cosh at$
33.71.	$\dfrac{s^3+a^2s}{(s^2-a^2)^4}$	$\dfrac{t^3\operatorname{senh} at}{24a}$
33.72.	$\dfrac{1}{s^3+a^3}$	$\dfrac{e^{at/2}}{3a^2}\left\{\sqrt{3}\operatorname{sen}\dfrac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\dfrac{\sqrt{3}at}{2}+e^{-3at/2}\right\}$

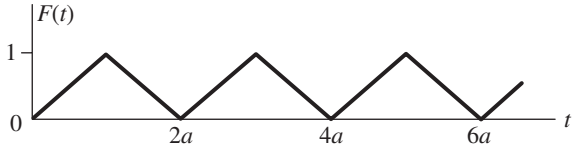
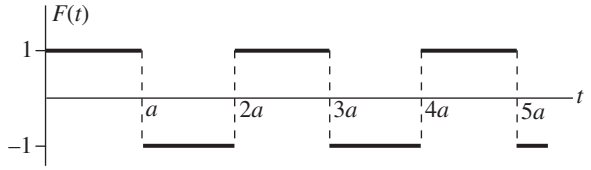
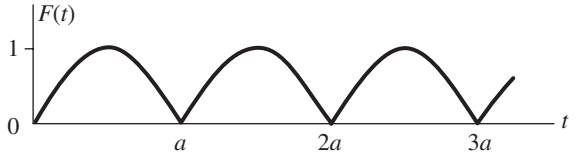
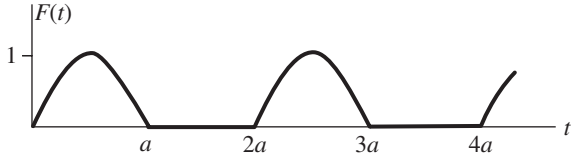
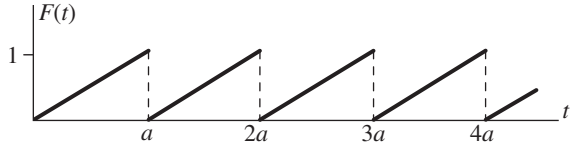
	$f(s)$	$F(t)$
33.73.	$\frac{s}{s^3+a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a}\left\{\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}+\sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}at}{2}-e^{-3at/2}\right\}$
33.74.	$\frac{s^2}{s^3+a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{-at}+2e^{at/2}\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
33.75.	$\frac{1}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2}\left\{e^{3at/2}-\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}-\sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}at}{2}\right\}$
33.76.	$\frac{s}{s^3-a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a}\left\{\sqrt{3}\,\text{sen}\,\frac{\sqrt{3}at}{2}-\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}+e^{3at/2}\right\}$
33.77.	$\frac{s^2}{s^3-a^3}$	$\frac{1}{3}\left(e^{at}+2e^{-at/2}\cos\frac{\sqrt{3}at}{2}\right)$
33.78.	$\frac{1}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{4a^3}(\text{sen}\,at\cosh at-\cos at\,\text{senh}\,at)$
33.79.	$\frac{s}{s^4+4a^4}$	$\frac{\text{sen}\,at\,\text{senh}\,at}{2a^2}$
33.80.	$\frac{s^2}{s^4+4a^4}$	$\frac{1}{2a}(\text{sen}\,at\cosh at+\cos at\,\text{senh}\,at)$
33.81.	$\frac{s^3}{s^4+4a^4}$	$\cos at\cosh at$
33.82.	$\frac{1}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^3}(\text{senh}\,at-\text{sen}\,at)$
33.83.	$\frac{s}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a^2}(\cosh at-\cos at)$
33.84.	$\frac{s^2}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2a}(\text{senh}\,at+\text{sen}\,at)$
33.85.	$\frac{s^3}{s^4-a^4}$	$\frac{1}{2}(\cosh at+\cos at)$
33.86.	$\frac{1}{\sqrt{s+a}+\sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt}-e^{-at}}{2(b-a)\sqrt{\pi t^3}}$
33.87.	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\text{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
33.88.	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\frac{e^{at}\text{erf}\sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
33.89.	$\frac{1}{\sqrt{s-a}+b}$	$e^{at}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi t}}-be^{b^2t}\text{erfc}(b\sqrt{t})\right\}$

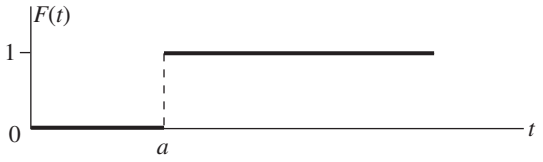
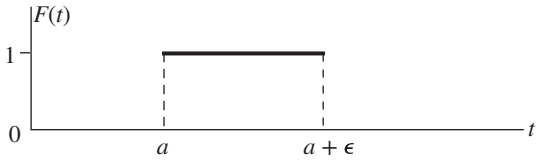
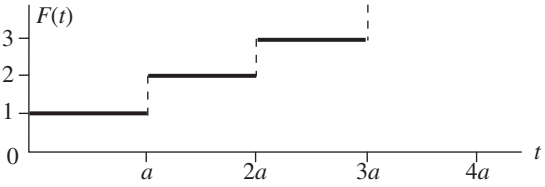
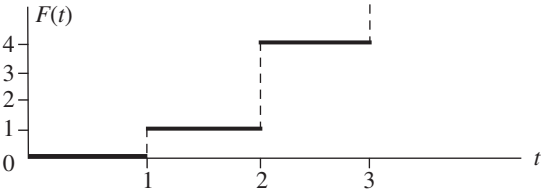
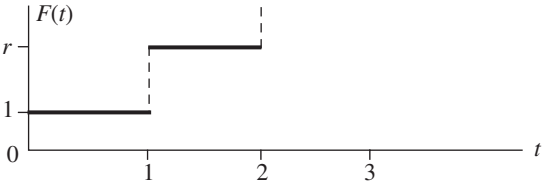
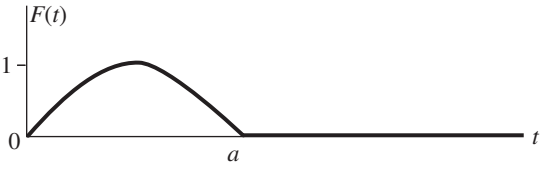
	$f(s)$	$F(t)$
33.90.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$
33.91.	$\dfrac{1}{\sqrt{s^2-a^2}}$	$I_0(at)$
33.92.	$\dfrac{(\sqrt{s^2+a^2}-s)^n}{\sqrt{s^2+a^2}} \quad n>-1$	$a^n J_n(at)$
33.93.	$\dfrac{(s-\sqrt{s^2-a^2})^n}{\sqrt{s^2-a^2}} \quad n>-1$	$a^n I_n(at)$
33.94.	$\dfrac{e^{b(s-\sqrt{s^2+a^2})}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(a\sqrt{t(t+2b)})$
33.95.	$\dfrac{e^{-b\sqrt{s^2+a^2}}}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$\begin{cases} J_0(a\sqrt{t^2-b^2}) & t>b \\ 0 & t<b \end{cases}$
33.96.	$\dfrac{1}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tJ_1(at)}{a}$
33.97.	$\dfrac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$tJ_0(at)$
33.98.	$\dfrac{s^2}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$J_0(at)-atJ_1(at)$
33.99.	$\dfrac{1}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$\dfrac{tI_1(at)}{a}$
33.100.	$\dfrac{s}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$tI_0(at)$
33.101.	$\dfrac{s^2}{(s^2-a^2)^{3/2}}$	$I_0(at)+atI_1(at)$
33.102.	$\dfrac{1}{s(e^s-1)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$ Vea también la fila 33.165.	$F(t)=n, n\leqq t<n+1, n=0,1,2,\ldots$
33.103.	$\dfrac{1}{s(e^s-r)}=\dfrac{e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$	$F(t)=\sum_{k=1}^{[t]} r^k$ donde $[t]$ = mayor entero $\leqq t$
33.104.	$\dfrac{e^s-1}{s(e^s-r)}=\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Vea también la fila 33.167.	$F(t)=r^n, n\leqq t<n+1, n=0,1,2,\ldots$
33.105.	$\dfrac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.106.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\dfrac{\operatorname{sen} 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$
33.107.	$\dfrac{e^{-a/s}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\left(\dfrac{t}{a}\right)^{n/2} J_n(2\sqrt{at})$
33.108.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$
33.109.	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{\pi t^3}} e^{-a^2/4t}$
33.110.	$\dfrac{1 - e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erf}(a/2\sqrt{t})$
33.111.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$	$\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$
33.112.	$\dfrac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}(\sqrt{s} + b)}$	$e^{b(bt+a)} \operatorname{erfc}\left(b\sqrt{t} + \dfrac{a}{2\sqrt{t}}\right)$
33.113.	$\dfrac{e^{-a/\sqrt{s}}}{s^{n+1}} \quad n > -1$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t} a^{2n+1}} \int_0^\infty u^n e^{-u^2/4a^2 t} J_{2n}(2\sqrt{u})\, du$
33.114.	$\ln\left(\dfrac{s+a}{s+b}\right)$	$\dfrac{e^{-bt} - e^{-at}}{t}$
33.115.	$\dfrac{\ln[(s^2 + a^2)/a^2]}{2s}$	$Ci(at)$
33.116.	$\dfrac{\ln[(s+a)/a]}{s}$	$Ei(at)$
33.117.	$-\dfrac{(\gamma + \ln s)}{s}$ γ = constante de Euler = .5772156 …	$\ln t$
33.118.	$\ln\left(\dfrac{s^2 + a^2}{s^2 + b^2}\right)$	$\dfrac{2(\cos at - \cos bt)}{t}$
33.119.	$\dfrac{\pi^2}{6s} + \dfrac{(\gamma + \ln s)^2}{s}$ γ = constante de Euler = .5772156 …	$\ln^2 t$
33.120.	$\dfrac{\ln s}{s}$	$-(\ln t + \gamma)$ γ = constante de Euler = .5772156 …
33.121.	$\dfrac{\ln^2 s}{s}$	$(\ln t + \gamma)^2 - \frac{1}{6}\pi^2$ γ = constante de Euler = .5772156 …

	$f(s)$	$F(t)$
33.122.	$\dfrac{\Gamma'(n+1)-\Gamma(n+1)\ln s}{s^{n+1}} \quad n>-1$	$t^n \ln t$
33.123.	$\tan^{-1}(a/s)$	$\dfrac{\operatorname{sen} at}{t}$
33.124.	$\dfrac{\tan^{-1}(a/s)}{s}$	$Si(at)$
33.125.	$\dfrac{e^{a/s}}{\sqrt{s}}\operatorname{erfc}(\sqrt{a/s})$	$\dfrac{e^{-2\sqrt{at}}}{\sqrt{\pi t}}$
33.126.	$e^{s^2/4a^2}\operatorname{erfc}(s/2a)$	$\dfrac{2a}{\sqrt{\pi}}e^{-a^2t^2}$
33.127.	$\dfrac{e^{s^2/4a^2}\operatorname{erfc}(s/2a)}{s}$	$\operatorname{erf}(at)$
33.128.	$\dfrac{e^{as}\operatorname{erfc}\sqrt{as}}{\sqrt{s}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{\pi(t+a)}}$
33.129.	$e^{as}Ei(as)$	$\dfrac{1}{t+a}$
33.130.	$\dfrac{1}{a}\left[\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}-\operatorname{sen} as\, Ci(as)\right]$	$\dfrac{1}{t^2+a^2}$
33.131.	$\operatorname{sen} as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}+\cos as\, Ci(as)$	$\dfrac{t}{t^2+a^2}$
33.132.	$\dfrac{\cos as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}-\operatorname{sen} as\, Ci(as)}{s}$	$\tan^{-1}(t/a)$
33.133.	$\dfrac{\operatorname{sen} as\left\{\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right\}-\cos as\, Ci(as)}{s}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
33.134.	$\left[\dfrac{\pi}{2}-Si(as)\right]^2+Ci^2(as)$	$\dfrac{1}{t}\ln\left(\dfrac{t^2+a^2}{a^2}\right)$
33.135.	0	$\mathcal{N}(t)$ = función nula
33.136.	1	$\delta(t)$ = función delta
33.137.	e^{-as}	$\delta(t-a)$
33.138.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Vea también la fila 33.163.	$\mathcal{U}(t-a)$

	$f(s)$	$F(t)$
33.139.	$\frac{\operatorname{senh} sx}{s \operatorname{senh} sa}$	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\cos\frac{n\pi t}{a}$
33.140.	$\frac{\operatorname{senh} sx}{s \cosh sa}$	$\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.141.	$\frac{\cosh sx}{s \operatorname{senh} as}$	$\frac{t}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\cos\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{a}$
33.142.	$\frac{\cosh sx}{s \cosh sa}$	$1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.143.	$\frac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\frac{xt}{a}+\frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{a}$
33.144.	$\frac{\operatorname{senh} sx}{s^2 \cosh sa}$	$x+\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.145.	$\frac{\cosh sx}{s^2 \operatorname{senh} sa}$	$\frac{t^2}{2a}+\frac{2a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{a}\left(1-\cos\frac{n\pi t}{a}\right)$
33.146.	$\frac{\cosh sx}{s^2 \cosh sa}$	$t+\frac{8a}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.147.	$\frac{\cosh sx}{s^3 \cosh sa}$	$\frac{1}{2}(t^2+x^2-a^2)-\frac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}\cos\frac{(2n-1)\pi t}{2a}$
33.148.	$\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\frac{2\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$
33.149.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{\pi}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
33.150.	$\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
33.151.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{\sqrt{s}\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{a}+\frac{2}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\cos\frac{n\pi x}{a}$
33.152.	$\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\frac{x}{a}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2\pi^2 t/a^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$
33.153.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s\cosh a\sqrt{s}}$	$1+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n-1}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$
33.154.	$\frac{\operatorname{senh} x\sqrt{s}}{s^2\operatorname{senh} a\sqrt{s}}$	$\frac{xt}{a}+\frac{2a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}(1-e^{-n^2\pi^2 t/a^2})\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$
33.155.	$\frac{\cosh x\sqrt{s}}{s^2\cosh a\sqrt{s}}$	$\frac{1}{2}(x^2-a^2)+t-\frac{16a^2}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n-1)^3}e^{-(2n-1)^2\pi^2 t/4a^2}\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2a}$

	$f(s)$	$F(t)$
33.156.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{sJ_0(ia\sqrt{s})}$	$1-2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n J_1(\lambda_n)}$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(\lambda)=0$
33.157.	$\dfrac{J_0(ix\sqrt{s})}{s^2J_0(ia\sqrt{s})}$	$\dfrac{1}{4}(x^2-a^2)+t+2a^2\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\lambda_n^2 t/a^2}J_0(\lambda_n x/a)}{\lambda_n^3 J_1(\lambda_n)}$ donde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(\lambda)=0$
33.158.	$\dfrac{1}{as^2}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda triangular  Fig. 33-1
33.159.	$\dfrac{1}{s}\tanh\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Onda cuadrada  Fig. 33-2
33.160.	$\dfrac{\pi a}{a^2s^2+\pi^2}\coth\left(\dfrac{as}{2}\right)$	Función de onda senoidal rectificada  Fig. 33-3
33.161.	$\dfrac{\pi a}{(a^2s^2+\pi^2)(1-e^{-as})}$	Función de onda senoidal semirrectificada  Fig. 33-4
33.162.	$\dfrac{1}{as^2}-\dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$	Función de onda diente de sierra  Fig. 33-5

	$f(s)$	$F(t)$
33.163.	$\dfrac{e^{-as}}{s}$ Vea también la fila 33.138.	Función unitaria de Heaviside $\mathcal{U}(t-a)$  Fig. 33-6
33.164.	$\dfrac{e^{-as}(1-e^{-\epsilon s})}{s}$	Función de impulso unitario  Fig. 33-7
33.165.	$\dfrac{1}{s(1-e^{-as})}$ Vea también la fila 33.102.	Función escalón  Fig. 33-8
33.166.	$\dfrac{e^{-s}+e^{-2s}}{s(1-e^{-s})^2}$	$F(t) = n^2,\ n \leqq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$  Fig. 33-9
33.167.	$\dfrac{1-e^{-s}}{s(1-re^{-s})}$ Vea también la fila 33.104.	$F(t) = r^n,\ n \leqq t < n+1,\ n = 0, 1, 2, \ldots$  Fig. 33-10
33.168.	$\dfrac{\pi a(1+e^{-as})}{a^2s^2+\pi^2}$	$F(t) = \begin{cases} \operatorname{sen}(\pi t/a) & 0 \leqq t \leqq a \\ 0 & t > a \end{cases}$  Fig. 33-11

34 TRANSFORMADA DE FOURIER

Teorema de la integral de Fourier

34.1. $f(x) = \int_0^\infty \{A(\alpha)\cos\alpha x + B(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x\}\, d\alpha$

donde

34.2. $$\begin{cases} A(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos\alpha x\, dx \\ B(\alpha) = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\, dx \end{cases}$$

Las condiciones suficientes bajo las cuales este teorema es válido son:

(i) $f(x)$ y $f'(x)$ sean continuas por segmentos en todo intervalo finito $-L < x < L$;

(ii) $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx$ sea convergente;

(iii) $f(x)$ se reemplaza por $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$ si x es un punto de discontinuidad.

Formas equivalentes del teorema de la integral de Fourier

34.3. $f(x) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\alpha=-\infty}^{\infty}\int_{u=-\infty}^{\infty} f(u)\cos\alpha(x-u)\, du\, d\alpha$

34.4. $$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x}\, d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{-i\alpha u}\, du \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u)e^{i\alpha(x-u)}\, du\, d\alpha \end{aligned}$$

34.5. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sen}\alpha x\, d\alpha \int_0^\infty f(u)\operatorname{sen}\alpha u\, du$

donde $f(x)$ es una *función impar* $[f(-x) = -f(x)]$.

34.6. $f(x) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^\infty \cos\alpha x\, d\alpha \int_0^\infty f(u)\cos\alpha u\, du$

donde $f(x)$ es una *función par* $[f(-x) = f(x)]$.

Transformadas de Fourier

La transformada de Fourier de $f(x)$ se define como

34.7. $\mathcal{F}\{f(x)\} = F(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\alpha x}dx$

Entonces, a partir de la fórmula 34.7 se sigue que la transformada inversa de Fourier de $F(\alpha)$ es

34.8. $\mathcal{F}^{-1}\{F(\alpha)\} = f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha$

A $f(x)$ y $F(\alpha)$ se les llama *pares de transformadas de Fourier*.

Teorema de convolución para transformadas de Fourier

Si $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ y $G(\alpha) = \mathcal{F}\{g(x)\}$, entonces

34.9. $\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)G(\alpha)e^{i\alpha x}d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)du = f^* g$

donde $f^* g$ se llama *convolución* de f y g. Entonces,

34.10. $\mathcal{F}\{f^* g\} = \mathcal{F}\{f\}\,\mathcal{F}\{g\}$

Identidad de Parseval

Si $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$, entonces

34.11. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\alpha)|^2 d\alpha$

De forma más general, si $F(\alpha) = \mathcal{F}\{f(x)\}$ y $G(\alpha) = \mathcal{F}\{g(x)\}$, entonces

34.12. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha)\overline{G(\alpha)}d\alpha$

donde la barra denota el conjugado complejo.

Transformada seno de Fourier

La transformada seno de Fourier de $f(x)$ se define como sigue:

34.13. $F_S(\alpha) = \mathcal{F}_S\{f(x)\} = \int_0^{\infty} f(x)\operatorname{sen}\alpha x\,dx$

Entonces, a partir de la fórmula 34.13, la transformada inversa seno de Fourier de $F_S(\alpha)$ es

34.14. $f(x) = \mathcal{F}_S^{-1}\{F_S(\alpha)\} = \frac{2}{\pi}\int_0^{\infty} F_S(\alpha)\operatorname{sen}\alpha x\,d\alpha$

Transformada coseno de Fourier

La transformada coseno de Fourier de $f(x)$ se define como

34.15. $F_C(\alpha) = \mathcal{F}_C\{f(x)\} = \int_0^\infty f(x)\cos\alpha\, x\, dx$

Entonces, a partir de la fórmula 34.15, la transformada inversa coseno de Fourier de $F_C(\alpha)$ es

34.16. $f(x) = \mathcal{F}_C^{-1}\{F_C(\alpha)\} = \dfrac{2}{\pi}\int_0^\infty F_C(\alpha)\cos\alpha\, x\, d\alpha$

Pares de transformadas de Fourier notables

	$f(x)$	$F(\alpha)$
34.17.	$\begin{cases} 1 & \lvert x\rvert < b \\ 0 & \lvert x\rvert > b \end{cases}$	$\dfrac{2\operatorname{sen} b\alpha}{\alpha}$
34.18.	$\dfrac{1}{x^2+b^2}$	$\dfrac{\pi e^{-b\alpha}}{b}$
34.19.	$\dfrac{x}{x^2+b^2}$	$-i\pi e^{-b\alpha}$
34.20.	$f^{(n)}(x)$	$i^n\alpha^n F(\alpha)$
34.21.	$x^n f(x)$	$i^n \dfrac{d^n F}{d\alpha^n}$
34.22.	$f(bx)e^{itx}$	$\dfrac{1}{b}F\left(\dfrac{\alpha - t}{b}\right)$

Pares de transformadas de Fourier notables

	$f(x)$	$F_C(\alpha)$
34.23.	$\begin{cases} 1 & 0<x<b \\ 0 & x>b \end{cases}$	$\dfrac{1-\cos b\alpha}{\alpha}$
34.24.	x^{-1}	$\dfrac{\pi}{2}$
34.25.	$\dfrac{x}{x^2+b^2}$	$\dfrac{\pi}{2}e^{-b\alpha}$
34.26.	e^{-bx}	$\dfrac{\alpha}{\alpha^2+b^2}$
34.27.	$x^{n-1}e^{-bx}$	$\dfrac{\Gamma(n)\operatorname{sen}(n\tan^{-1}\alpha/b)}{(\alpha^2+b^2)^{n/2}}$
34.28.	xe^{-bx^2}	$\dfrac{\sqrt{\pi}}{4b^{3/2}}\alpha e^{-\alpha^2/4b}$
34.29.	$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}$
34.30.	x^{-n}	$\dfrac{\pi\alpha^{n-1}\csc(n\pi/2)}{2\Gamma(n)} \quad 0<n<2$
34.31.	$\dfrac{\operatorname{sen} bx}{x}$	$\dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{\alpha+b}{\alpha-b}\right)$
34.32.	$\dfrac{\operatorname{sen} bx}{x^2}$	$\begin{cases} \pi\alpha/2 & \alpha<b \\ \pi b/2 & \alpha>b \end{cases}$
34.33.	$\dfrac{\cos bx}{x}$	$\begin{cases} 0 & \alpha<b \\ \pi/4 & \alpha=b \\ \pi/2 & \alpha>b \end{cases}$
34.34.	$\tan^{-1}(x/b)$	$\dfrac{\pi}{2\alpha}e^{-b\alpha}$
34.35.	$\csc bx$	$\dfrac{\pi}{2b}\tanh\dfrac{\pi\alpha}{2b}$
34.36.	$\dfrac{1}{e^{2x}-1}$	$\dfrac{\pi}{4}\coth\left(\dfrac{\pi\alpha}{2}\right)-\dfrac{1}{2\alpha}$

Pares de transformadas de Fourier notables

	$f(x)$	$F_C(\alpha)$
34.37.	$\begin{cases} 1 & 0<x<b \\ 0 & x>b \end{cases}$	$\dfrac{\operatorname{sen} b\alpha}{\alpha}$
34.38.	$\dfrac{1}{x^2+b^2}$	$\dfrac{\pi e^{-b\alpha}}{2b}$
34.39.	e^{-bx}	$\dfrac{b}{\alpha^2+b^2}$
34.40.	$x^{n-1}e^{-bx}$	$\dfrac{\Gamma(n)\cos(n\tan^{-1}\alpha/b)}{(\alpha^2+b^2)^{n/2}}$
34.41.	e^{-bx^2}	$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{b}}e^{-\alpha^2/4b}$
34.42.	$x^{-1/2}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}$
34.43.	x^{-n}	$\dfrac{\pi\alpha^{n-1}\sec(n\pi/2)}{2\Gamma(n)}, \quad 0<n<1$
34.44.	$\ln\left(\dfrac{x^2+b^2}{x^2+c^2}\right)$	$\dfrac{e^{-c\alpha}-e^{-b\alpha}}{\pi\alpha}$
34.45.	$\dfrac{\operatorname{sen} bx}{x}$	$\begin{cases} \pi/2 & \alpha<b \\ \pi/4 & \alpha=b \\ 0 & \alpha>b \end{cases}$
34.46.	$\operatorname{sen} bx^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{8b}}\left(\cos\dfrac{\alpha^2}{4b}-\operatorname{sen}\dfrac{\alpha^2}{4b}\right)$
34.47.	$\cos bx^2$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{8b}}\left(\cos\dfrac{\alpha^2}{4b}+\operatorname{sen}\dfrac{\alpha^2}{4b}\right)$
34.48.	$\operatorname{sech} bx$	$\dfrac{\pi}{2b}\operatorname{sech}\dfrac{\pi\alpha}{2b}$
34.49.	$\dfrac{\cosh(\sqrt{\pi}x/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}x)}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}\dfrac{\cosh(\sqrt{\pi}\alpha/2)}{\cosh(\sqrt{\pi}\alpha)}$
34.50.	$\dfrac{e^{-b\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2\alpha}}\{\cos(2b\sqrt{\alpha})-\operatorname{sen}(2b\sqrt{\alpha})\}$

35 FUNCIONES ELÍPTICAS

Integral elíptica incompleta de primer tipo

35.1. $$u = F(k,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = \int_0^{x} \frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

donde $\phi = \operatorname{am} u$ es la *amplitud* de u y $x = \operatorname{sen}\phi$. En esta ecuación y en la siguiente se supone que $0 < k < 1$.

Integral elíptica completa de primer tipo

35.2. $$K = F(k,\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = \int_0^{1} \frac{d\upsilon}{\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right\}$$

Integral elíptica incompleta de segundo tipo

35.3. $$E(k,\phi) = \int_0^{\phi} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int_0^{x} \frac{\sqrt{1-k^2\upsilon^2}}{\sqrt{1-\upsilon^2}} d\upsilon$$

Integral elíptica completa de segundo tipo

35.4. $$E = E(k,\pi/2) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}\, d\theta = \int_0^{1} \frac{\sqrt{1-k^2\upsilon^2}}{\sqrt{1-\upsilon^2}}\, d\upsilon$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 - \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 \frac{k^4}{3} - \left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 \frac{k^6}{5} - \cdots\right\}$$

Integral elíptica incompleta de tercer tipo

35.5. $$\Pi(k,n,\phi) = \int_0^{\phi} \frac{d\theta}{(1+n\operatorname{sen}^2\theta)\sqrt{1-k^2 \operatorname{sen}^2\theta}} = \int_0^{x} \frac{d\upsilon}{(1+n\upsilon^2)\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

Integral elíptica completa de tercer tipo

35.6. $$\Pi(k,n,\pi/2)=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{(1+n\,\mathrm{sen}^2\theta)\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\theta}}=\int_0^1\frac{d\upsilon}{(1+n\upsilon^2)\sqrt{(1-\upsilon^2)(1-k^2\upsilon^2)}}$$

Transformada de Landen

35.7. $$\tan\phi=\frac{\mathrm{sen}\,2\phi_1}{k+\cos 2\phi_1}\qquad \text{o}\qquad k\,\mathrm{sen}\,\phi=\mathrm{sen}(2\phi_1-\phi)$$

Esto implica que

35.8. $$F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\theta}}=\frac{2}{1+k}\int_0^{\phi_1}\frac{d\theta_1}{\sqrt{1-k_1^2\,\mathrm{sen}^2\theta_1}}$$

donde $k_1=2\sqrt{k}/(1+k)$. Si repetimos esto de forma sucesiva se obtienen las sucesiones $k_1,k_2,k_3,\ldots$ y $\phi_1,\phi_2,\phi_3,\ldots$ de tal forma que $k<k_1<k_2<k_3<\cdots<1$, donde $\lim_{n\to\infty}k_n=1$. Se sigue que

35.9. $$F(k,\Phi)=\sqrt{\frac{k_1k_2k_3\cdots}{k}}\int_0^{\Phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta}}=\sqrt{\frac{k_1k_2k_3\cdots}{k}}\ln\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\Phi}{2}\right)$$

donde

35.10. $$k_1=\frac{2\sqrt{k}}{1+k},\qquad k_2=\frac{2\sqrt{k_1}}{1+k_1},\ldots\qquad \text{y}\qquad \Phi\lim_{n\to\infty}\phi_n$$

Este resultado se utiliza para aproximar el valor de $F(k, \phi)$.

Funciones elípticas de Jacobi

A partir de la fórmula 35.1, definimos las siguientes funciones elípticas:

35.11. $$x=\mathrm{sen}(\mathrm{am}\ u)=\mathrm{sn}\ u$$

35.12. $$\sqrt{1-x^2}=\cos(\mathrm{am}\ u)=\mathrm{cn}\ u$$

35.13. $$\sqrt{1-k^2x^2}=\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u}=\mathrm{dn}\ u$$

Podemos definir las funciones inversas $\mathrm{sn}^{-1}x$, $\mathrm{cn}^{-1}x$, $\mathrm{dn}^{-1}x$ y otras, como sigue:

35.14. $$\mathrm{ns}\,u=\frac{1}{\mathrm{sn}\,u}$$

35.15. $$\mathrm{nc}\,u=\frac{1}{\mathrm{cn}\,u}$$

35.16. $$\mathrm{nd}\,u=\frac{1}{\mathrm{dn}\,u}$$

35.17. $$\mathrm{sc}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

35.18. $$\mathrm{sd}\,u=\frac{\mathrm{sn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

35.19. $$\mathrm{cd}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

35.20. $$\mathrm{cs}\,u=\frac{\mathrm{cn}\,u}{\mathrm{sn}\,u}$$

35.21. $$\mathrm{dc}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{cn}\,u}$$

35.22. $$\mathrm{ds}\,u=\frac{\mathrm{dn}\,u}{\mathrm{dn}\,u}$$

Fórmulas de adición

35.23. $$\mathrm{sn}(u+\upsilon)=\frac{\mathrm{sn}\ u\ \mathrm{cn}\ \upsilon\ \mathrm{dn}\,\upsilon+\mathrm{cn}\,u\ \mathrm{sn}\,\upsilon\ \mathrm{dn}\,u}{1-k^2\,\mathrm{sn}^2\,u\,\mathrm{sn}^2\,\upsilon}$$

35.24. $\operatorname{cn}(u+v)=\dfrac{\operatorname{cn}u\,\operatorname{cn}v-\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\,\operatorname{dn}u\operatorname{dn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\,\operatorname{sn}^2v}$

35.25. $\operatorname{dn}(u+v)=\dfrac{\operatorname{dn}u\,\operatorname{dn}v-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{sn}v\,\operatorname{cn}u\operatorname{cn}v}{1-k^2\operatorname{sn}^2u\,\operatorname{sn}^2v}$

Derivadas

35.26. $\dfrac{d}{du}\operatorname{sn}u=\operatorname{cn}u\operatorname{dn}u$

35.27. $\dfrac{d}{du}\operatorname{cn}u=-\operatorname{sn}u\operatorname{dn}u$

35.28. $\dfrac{d}{du}\operatorname{dn}u=-k^2\operatorname{sn}u\operatorname{cn}u$

35.29. $\dfrac{d}{du}\operatorname{sc}u=\operatorname{dc}u\operatorname{nc}u$

Expansión de series

35.30. $\operatorname{sn}u=u-(1+k^2)\dfrac{u^3}{3!}+(1+14k^2+k^4)\dfrac{u^5}{5!}-(1+135k^2+135k^4+k^6)\dfrac{u^7}{7!}+\cdots$

35.31. $\operatorname{cn}u=1-\dfrac{u^2}{2!}+(1+4k^2)\dfrac{u^4}{4!}-(1+44k^2+16k^4)\dfrac{u^6}{6!}+\cdots$

35.32. $\operatorname{dn}u=1-k^2\dfrac{u^2}{2!}+k^2(4+k^2)\dfrac{u^4}{4!}-k^2(16+44k^2+k^4)\dfrac{u^6}{6!}+\cdots$

Constante de Catalán

35.33. $\dfrac{1}{2}\int_0^1 K\,dk=\dfrac{1}{2}\int_{k=0}^1\int_{\theta=0}^{\pi/2}\dfrac{d\theta\,dk}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}=\dfrac{1}{1^2}-\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}-\cdots=.915965594\ldots$

Periodos de funciones elípticas

Sean

35.34. $K=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\operatorname{sen}^2\theta}}, \qquad K'=\int_0^{\pi/2}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k'^2\operatorname{sen}^2\theta}} \qquad \text{donde } k'=\sqrt{1-k^2}$

Entonces

35.35. $\operatorname{sn}u$ tiene periodos $4K$ y $2iK'$

35.36. $\operatorname{cn}u$ tiene periodos $4K$ y $2K+2iK'$

35.37. $\operatorname{dn}u$ tiene periodos $2K$ y $4iK'$

Identidades que contienen funciones elípticas

35.38. $\text{sn}^2 u + \text{cn}^2 u = 1$

35.39. $\text{dn}^2 u + k^2 \text{sn}^2 u = 1$

35.40. $\text{dn}^2 u - k^2 \text{cn}^2 u = k'^2 \quad$ donde $k' = \sqrt{1-k^2}$

35.41. $\text{sn}^2 u = \dfrac{1 - \text{cn}\ 2u}{1 + \text{dn}\ 2u}$

35.42. $\text{cn}^2 u = \dfrac{\text{dn}\,2u + \text{cn}\,2u}{1 + \text{dn}\,2u}$

35.43. $\text{dn}^2 u = \dfrac{1 - k^2 + \text{dn}\,2u + k^2 \text{cn}\,u}{1 + \text{dn}\,2u}$

35.44. $\sqrt{\dfrac{1 - \text{cn}\,2u}{1 + \text{cn}\,2u}} = \dfrac{\text{sn}\,u\,\text{dn}\,u}{\text{cn}\ u}$

35.45. $\sqrt{\dfrac{1 - \text{dn}\,2u}{1 + \text{dn}\,2u}} = \dfrac{k\,\text{sn}\,u\,\text{cn}\,u}{\text{dn}\,u}$

Valores notables

35.46. $\text{sn}\ 0 = 0$ **35.47.** $\text{cn}\ 0 = 1$ **35.48.** $\text{dn}\ 0 = 1$ **35.49.** $\text{sc}\ 0 = 0$ **35.50.** $\text{am}\ 0 = 0$

Integrales

35.51. $\displaystyle\int \text{sn}\ u\,du = \frac{1}{k}\ln(\text{dn}\ u - k\ \text{cn}\ u)$

35.52. $\displaystyle\int \text{cn}\ u\ du = \frac{1}{k}\cos^{-1}(\text{dn}\ u)$

35.53. $\displaystyle\int \text{dn}\ u\ du = \text{sen}^{-1}(\text{sn}\ u)$

35.54. $\displaystyle\int \text{sc}\ u\ du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\text{dc}\ u + \sqrt{1-k^2}\,\text{nc}\ u\right)$

35.55. $\displaystyle\int \text{cs}\ u\ \ du = \ln(\text{ns}\ u - \text{ds}\ u)$

35.56. $\displaystyle\int \text{cd}\ u\ du = \frac{1}{k}\ln\ (\text{nd}\ u + k\ \text{sd}\ u)$

35.57. $\displaystyle\int \text{dc}\ u\,du = \ln(\text{nc}\ u + \text{sc}\ u)$

35.58. $\displaystyle\int \text{sd}\ u\ du = \frac{-1}{k\sqrt{1-k^2}}\text{sen}^{-1}(k\ \text{cd}\ u)$

35.59. $\displaystyle\int \text{ds}\ u\,du = \ln(\text{ns}\ u - \text{cs}\ u)$

35.60. $\displaystyle\int \text{ns}\ u\ du = \ln(\text{ds}\ u - \text{cs}\ u)$

35.61. $\displaystyle\int \text{nc}\ u\ du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\ln\left(\text{dc}\ u + \frac{\text{sc}\ u}{\sqrt{1-k^2}}\right)$

35.62. $\displaystyle\int \text{nd}\ u\ du = \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\cos^{-1}(\text{cd}\ u)$

Relación de Legendre

35.63. $EK' + E'K - KK' = \pi/2$

donde

35.64. $E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \qquad K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$

35.65. $E' = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta \qquad K' = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k'^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}$

36 FUNCIÓN ZETA DE RIEMANN Y OTRAS FUNCIONES

Función de error $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du$

36.1. $$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right)$$

36.2. $$\operatorname{erf}(x) \sim 1 - \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\, x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots \right)$$

36.3. $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$, $\operatorname{erf}(0) = 0$, $\operatorname{erf}(\infty) = 1$

Función de error complementaria $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-u^2} du$

36.4. $$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots \right)$$

36.5. $$\operatorname{erfc}(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}\, x} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2x^2)^3} + \cdots \right)$$

36.6. $\operatorname{erfc}(0) = 1$, $\operatorname{erfc}(\infty) = 0$

Integral exponencial $\operatorname{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$

36.7. $$\operatorname{Ei}(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1 - e^{-u}}{u} du$$

36.8. $$\operatorname{Ei}(x) = -\gamma - \ln x + \left(\frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^2}{2 \cdot 2!} + \frac{x^3}{3 \cdot 3!} - \cdots \right)$$

36.9. $$\operatorname{Ei}(x) \sim \frac{e^{-x}}{x} \left(1 - \frac{1!}{x} + \frac{2!}{x^2} - \frac{3!}{x^3} + \cdots \right)$$

36.10. $\operatorname{Ei}(\infty) = 0$

Integral senoidal $\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u} du$

36.11. $$\operatorname{Si}(x) = \frac{x}{1 \cdot 1!} - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \cdots$$

36.12. $$\operatorname{Si}(x) \sim \frac{\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} x}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots \right) - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots \right)$$

36.13. $\operatorname{Si}(-x) = -\operatorname{Si}(x)$, $\operatorname{Si}(0) = 0$, $\operatorname{Si}(\infty) = \pi/2$

Integral cosenoidal $\mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$

36.14. $\mathrm{Ci}(x) = -\gamma - \ln x + \int_0^x \frac{1-\cos u}{u}\,du$

36.15. $\mathrm{Ci}(x) = -\gamma - \ln x + \frac{x^2}{2\cdot 2!} - \frac{x^4}{4\cdot 4!} + \frac{x^6}{6\cdot 6!} - \frac{x^8}{8\cdot 8!} + \cdots$

36.16. $\mathrm{Ci}(x) \sim \frac{\cos x}{x}\left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \frac{5!}{x^5} - \cdots\right) - \frac{\operatorname{sen} x}{x}\left(1 - \frac{2!}{x^2} + \frac{4!}{x^4} - \cdots\right)$

36.17. $\mathrm{Ci}(\infty) = 0$

Integral senoidal de Fresnel $S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \operatorname{sen} u^2\,du$

36.18. $S(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x^3}{3\cdot 1!} - \frac{x^7}{7\cdot 3!} + \frac{x^{11}}{11\cdot 5!} - \frac{x^{15}}{15\cdot 7!} + \cdots\right)$

36.19. $S(x) \sim \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\cos x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right) + (\operatorname{sen} x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$

36.20. $S(-x) = -S(x), \qquad S(0) = 0, \qquad S(\infty) = \frac{1}{2}$

Integral cosenoidal de Fresnel $C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \cos u^2\,du$

36.21. $C(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^5}{5\cdot 2!} + \frac{x^9}{9\cdot 4!} - \frac{x^{13}}{13\cdot 6!} + \cdots\right)$

36.22. $C(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{(\operatorname{sen} x^2)\left(\frac{1}{x} - \frac{1\cdot 3}{2^2 x^5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2^4 x^9} - \cdots\right) - (\cos x^2)\left(\frac{1}{2x^3} - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2^3 x^7} + \cdots\right)\right\}$

36.23. $C(-x) = -C(x), \qquad C(0) = 0, \qquad C(\infty) = \frac{1}{2}$

Función Zeta de Riemann $\zeta(x) = \frac{1}{1^x} + \frac{1}{2^x} + \frac{1}{3^x} + \cdots$

36.24. $\zeta(x) = \frac{1}{\Gamma(x)} \int_0^\infty \frac{u^{x-1}}{e^{u-1}}\,du, \quad x > 1$

36.25. $\zeta(1-x) = 2^{1-x}\pi^{-x}\Gamma(x)\cos(\pi x/2)\zeta(x)$ (extensión a otros valores)

36.26. $\zeta(2k) = \frac{2^{2k-1}\pi^{2k}B_k}{(2k)!}\, k = 1, 2, 3, \ldots$

37 DESIGUALDADES

Desigualdad del triángulo

37.1. $\big||a_1|-|a_2|\big| \leqq |a_1+a_2| \leqq |a_1|+|a_2|$

37.2. $|a_1+a_2+\cdots+a_n| \leqq |a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$

Desigualdad de Cauchy-Schwarz

37.3. $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2 \leqq (a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$

La igualdad se cumple si y sólo si $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

Desigualdades que contienen las medias aritmética, geométrica y armónica

Si A, G y H son, respectivamente, las medias aritmética, geométrica y armónica de los números positivos a_1, a_2, ..., a_n, entonces

37.4. $H \leqq G \leqq A$

donde

37.5. $A = \dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

37.6. $G = \sqrt[n]{a_1\,a_2\ldots a_n}$

37.7. $\dfrac{1}{H} = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$

La igualdad se cumple si y sólo si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Desigualdad de Holder

37.8. $|a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n| \leqq (|a_1|^p+|a_2|^p+\cdots+|a_n|^p)^{1/p}(|b_1|^q+|b_2|^q+\cdots+|b_n|^q)^{1/q}$

donde

37.9. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1 \qquad p>1, q>1$

La igualdad se cumple si y sólo si $|a_1|^{p-1}/|b_1| = |a_2|^{p-1}/|b_2/ = \cdots = |a_n|^{p-1}/|b_n|$. Cuando $p = q = 2$, se obtiene la fórmula 37.3.

Desigualdad de Chebyshev

Si $a_1 \geqq a_2 \geqq \cdots \geqq a_n$ y $b_1 \geqq b_2 \geqq \cdots \geqq b_n$, entonces

37.10. $$\left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}{n}\right) \leqq \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{n}$$

o

37.11. $$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \leqq n(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n)$$

Desigualdad de Minkowski

Si $a_1, a_2, \ldots a_n, b_1, b_2, \ldots b_n$ son todas positivas y $p > 1$, entonces

37.12. $$\{(a_1 + b_1)^p + (a_2 + b_2)^p + \cdots + (a_n + b_n)^p\}^{1/p} \leqq (a_1^p + a_2^p + \cdots + a_n^p)^{1/p} + (b_1^p + b_2^p + \cdots + b_n^p)^{1/p}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

Desigualdad de Cauchy-Schwarz para integrales

37.13. $$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \leqq \left\{\int_a^b [f(x)]^2\,dx\right\}\left\{\int_a^b [g(x)]^2\,dx\right\}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $f(x)/g(x)$ es una constante.

Desigualdad de Holder para integrales

37.14. $$\int_a^b |f(x)g(x)|dx \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}\left\{\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right\}^{1/q}$$

donde $1/p + 1/q = 1$, $p > 1$, $q > 1$. Si $p = q = 2$, se obtiene 37.13.

La igualdad se cumple si y sólo si $|f(x)|^{p-1}/|g(x)|$ es una constante.

Desigualdad de Minkowski para integrales

Si $p > 1$,

37.15. $$\left\{\int_a^b |f(x) + g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} \leqq \left\{\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right\}^{1/p} + \left\{\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right\}^{1/p}$$

La igualdad se cumple si y sólo si $f(x)/g(x)$ es una constante.

38 PRODUCTOS INFINITOS

38.1. $\operatorname{sen} x = x\left(1-\frac{x^2}{x^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$

38.2. $\cos x = \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$

38.3. $\operatorname{senh} x = x\left(1+\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\cdots$

38.4. $\cosh x = \left(1+\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\cdots$

38.5. $\frac{1}{\Gamma(x)} = xe^{\gamma x}\left\{\left(1+\frac{x}{1}\right)e^{-x}\right\}\left\{\left(1+\frac{x}{2}\right)e^{-x/2}\right\}\left\{\left(1+\frac{x}{3}\right)e^{-x/3}\right\}\cdots$

Vea también la fórmula 25.11.

38.6. $J_0(x) = \left(1-\frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$.

38.7. $J_1(x) = x\left(1-\frac{x^2}{\lambda_1^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_2^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{\lambda_3^2}\right)\cdots$

donde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ son las raíces positivas de $J_1(x) = 0$.

38.8. $\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\cos\frac{x}{16}\cdots$

38.9. $\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\bullet\frac{2}{3}\bullet\frac{4}{3}\bullet\frac{4}{5}\bullet\frac{6}{5}\bullet\frac{6}{7}\bullet\cdots$

Esta ecuación se llama *producto de Wallis*.

39 ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Los datos numéricos $x_1, x_2,\ldots$ provienen una muestra aleatoria tomada de una población, o bien, de la población misma. Distinguimos ambos casos de acuerdo con la siguiente notación:

n = número de elementos de la muestra,
N = número de elementos de la población,

$\overline{x}$ = (se lee: x barra) = media muestral,	μ (se lee: mu) = media poblacional,
s^2 = varianza muestral,	σ^2 = varianza poblacional,
s = desviación estándar muestral,	σ = desviación estándar poblacional

Las letras griegas que se utilizan para la población se llaman *parámetros*, mientras que las letras latinas se utilizan para la muestra y se llaman *estadísticos*. Primero damos fórmulas para datos provenientes de una muestra y después fórmulas para datos de la población.

Agrupación de los datos

Con frecuencia, los datos de la muestra se concentran en grupos (datos agrupados). Un grupo se refiere a un conjunto de números, todos con el mismo valor x_i, o un conjunto (clase) de números en un intervalo dado de valor de clase x_i. En ese caso, suponemos que hay k grupos donde f_i denota el número de elementos en el grupo con valor o valor de clase x_i. Por lo tanto, el número total de datos es:

39.1. $n = \sum f_i$

Como es usual, Σ denota la suma sobre todos los valores del índice, a menos que se especifique otra cosa.

Algunas fórmulas estarán señaladas con (a) cuando se trate de datos sin agrupar o con (b) cuando se trate de datos agrupados.

Medidas de tendencia central

Media aritmética

La *media aritmética* o simplemente *media* de una muestra $x_1, x_2,\ldots, x_n$, usualmente llamado *el promedio*, es la suma de los valores divididos entre el número de valores. Esto es,

39.2(a). Media muestral: $$\overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \frac{\Sigma x_i}{n}$$

39.2(b). Media muestral: $$\overline{x} = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

Mediana

Supongamos que los datos $x_1, x_2,\ldots, x_n$ están ordenados en orden creciente. La *mediana* de los datos, denotada por

$$M \text{ o Mediana}$$

se define como el *valor central*. Esto es,

39.3(a). $$\text{Mediana} = \begin{cases} x_{k+1} & \text{cuando } n \text{ es impar y } n = 2k+1, \\ \dfrac{x_k + x_{k+1}}{2} & \text{cuando } n \text{ es par y } n = 2k. \end{cases}$$

La mediana de datos agrupados se obtiene al determinar primero la función de *frecuencia acumulada* F_s. Específicamente, definimos:

$$F_s = f_1 + f_2 + \cdots + f_s$$

esto es, F_s es la suma de las frecuencias hasta f_s. Entonces,

39.3(b.1). $$\text{Mediana} = \begin{cases} x_{j+1} & \text{cuando } n = 2k+1 \text{ (impar) y } F_j < k+1 \le F_{j+1}, \\ \dfrac{x_j + x_{j+1}}{2} & \text{cuando } n = 2k \text{ (par), y } F_j = k. \end{cases}$$

Encontrar la mediana de un conjunto de datos organizado en clases es más complicado. Primero se determina la mediana de la clase n, esto es, la clase con el valor medio; después se interpola en la clase mediante el uso de la fórmula:

39.3(b.2). $$\text{Mediana} = L_m + c\frac{(n/2) - F_{m-1}}{f_m}$$

donde L_m denota el límite inferior de la clase con el valor medio y c es el tamaño de la clase (la longitud del intervalo de la clase).

Moda

La moda es el valor o valores que ocurren más frecuentemente.

39.4. Moda x_m = valor numérico que ocurre el mayor número de veces.

La moda no está definida si todo x_m ocurre el mismo número de veces. Cuando la moda está definida podría no ser única.

Media ponderada y gran media

Supongamos que a cada x_i se le asigna un peso $w_i \ge 0$. Entonces,

39.5. $$\text{Media ponderada } \overline{x}_w = \frac{w_1x_1 + w_2x_2 + \cdots + w_kx_k}{w_1 + w_2 + \cdots + w_k} = \frac{\Sigma\, w_ix_i}{\Sigma\, w_i}$$

Observe que la fórmula 39.2(b.1) es un caso especial de la fórmula 39.4, donde el peso w_i de x_i es su frecuencia.

Supongamos que hay k conjuntos muestra y que cada muestra tiene n_i elementos y media $\overline{x}$. Entonces la *gran media,* denotada por $\overline{\overline{x}}_i$ es la "media de medias" donde cada media está ponderada por el número de elementos en su muestra. Específicamente:

39.6. $$\text{Gran media } \overline{\overline{x}} = \frac{n_1\overline{x}_1 + n_2\overline{x}_2 + \cdots + n_k\overline{x}_k}{n_1 + n_2 + \cdots + n_k} = \frac{\Sigma\, n_i\overline{x}_i}{\Sigma\, n_i}$$

Medias geométrica y armónica

La *media geométrica* (GM) y la media armónica (HM) se definen como sigue.

39.7(a). $$\text{GM} = \sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

39.7(b). $$\text{GM} = \sqrt[n]{x_1^{f_1}x_2^{f_2}\cdots x_k^{f_k}}$$

39.8(a). $$\text{HM} = \frac{n}{1/x_1 + 1/x_2 + \cdots + 1/x_n} = \frac{n}{\Sigma\,(1/x_i)}$$

39.8(b). $$\text{HM} = \frac{n}{f_1/x_1 + f_2/x_2 + \cdots + f_k/x_k} = \frac{n}{\Sigma(f_k/x_i)}$$

Relación entre las medias aritmética, geométrica y armónica

39.9. $\text{HM} \le \text{GM} \le \overline{x}$

Se tiene igualdad solamente cuando los valores de la muestra son todos iguales.

Rango medio

El *rango medio* es el promedio del menor valor x_1 y el mayor valor x_n. Esto es,

39.10. Rango medio: $$\text{media} = \frac{x_1 + x_n}{2}$$

Media poblacional

La fórmula para la media poblacional μ es:

39.11(a). Media poblacional: $$\mu = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N} = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

39.11(b). Media poblacional: $$\mu = \frac{f_1x_1 + f_2x_2 + \cdots + f_kx_k}{f_1 + f_2 + \cdots + f_k} = \frac{\Sigma f_i x_i}{\Sigma f_i}$$

(Recordemos que N es el número de elementos de la población).

Observemos que la fórmula para la media poblacional μ coincide con la fórmula de la media muestral $\overline{x}$. Por otro lado, la fórmula para la desviación estándar poblacional σ no coincide con la fórmula de la desviación estándar muestral s. (Es por esta razón que damos las fórmulas de μ y $\overline{x}$ por separado).

Medidas de dispersión de los datos

Varianza y desviación estándar muestral

Se considera una muestra de n elementos y media muestral $\overline{x}$.

39.12(a). Varianza muestral: $$s^2 = \frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{n-1} = \frac{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}{n-1}$$

39.12(b). Varianza muestral: $$s^2 = \frac{\Sigma f_i(x_i - \overline{x})^2}{(\Sigma f_i) - 1} = \frac{\Sigma f_i x_i^2 - (\Sigma f_i x_i)^2/\Sigma f_i}{(\Sigma f_i) - 1}$$

39.13. Desviación estándar muestral: $s = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{s^2}$

EJEMPLO 39.1: Considere la siguiente distribución de frecuencias:

x_i	1	2	3	4	5	6
f_i	8	14	7	12	3	1

Entonces $n = \Sigma, f_i = 45$ y $\Sigma f_i x_i = 126$. Por lo tanto, a partir de la fórmula 39.2(b),

$$\text{Media } \overline{x} = \frac{\Sigma x_i f_i}{\Sigma f_i} = \frac{126}{45} = 2.8$$

También, $n - 1 = 44$ y $\Sigma f_i x_i^2 = 430$. De donde, por las fórmulas 39.12(b) y 39.13,

$$s^2 = \frac{430 - (126)^2/45}{44} \approx 1.75 \quad \text{y} \quad s = 1.32$$

Para encontrar la mediana M, primero calculamos las frecuencias acumuladas:

$$F_1 = 8, \quad F_2 = 22, \quad F_3 = 29, \quad F_4 = 41, \quad F_5 = 44, \quad F_6 = 45 = n$$

Como n es impar y $(n + 1)/2 = 23$, entonces:

$$\text{Mediana M} = 23° \text{ valor} = 3$$

El valor con mayor frecuencia es el 2, por lo tanto,

$$\text{Moda} = 2$$

Desviación media (MD) y media cuadrática (RMS)

La *desviación media* se escribe MD (de sus siglas en inglés: *mean deviation*) mientras que la *media cuadrática* (también conocida como *valor cuadrático medio* o *raíz de la media cuadrática*) se denota con RMS (de sus siglas en inglés: *root mean square*). Como en lo anterior, $\bar{x}$ es la media de los datos y, para datos agrupados, $n = \Sigma f_i$.

39.14(a). $\text{MD} = \frac{1}{n}|x_i - \bar{x}|$ **39.14(b).** $\text{MD} = \frac{1}{n}|f_i x_i - \bar{x}|$

39.15(a). $\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n}(\Sigma x_i^2)}$ **39.15(b).** $\text{RMS} = \sqrt{\frac{1}{n}(\Sigma f_i x_i^2)}$

Medidas de posición (cuartiles y percentiles)

Suponemos que los datos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ están ordenados en forma creciente.

39.16. Rango de la muestra: $x_n - x_1$.

Hay tres cuartiles: el primer cuartil o cuartil inferior se denota por Q_1 o Q_L; el segundo cuartil o cuartil medio se denota por Q_2 o M; y el tercer cuartil o cuartil superior se denota por Q_3 o Q_U. Estos cuartiles (que esencialmente dividen a los datos en "cuartos") se definen como sigue, donde "mitad de" significa $n/2$ si n es par y $(n\text{-}1)/2$ si n es impar:

39.17. $Q_L (= Q_1)$ = mediana de la primera mitad de los valores.
M $(= Q_2)$ = mediana de los valores.
$Q_U (= Q_3)$ = mediana de la segunda mitad de los valores.

39.18. Resumen de los cinco números: $[L, Q_L, \text{M}, Q_U, H]$, donde $L = x_1$ (el valor menor) y $H = x_n$ (el valor mayor).

39.19. Rango intercuartil: $Q_U - Q_L$

39.20. Rango semi-intercuartil: $Q = \frac{Q_U - Q_L}{2}$

El k-ésimo *percentil*, denotado por P_k, es el número para el cual k por ciento de los valores son a lo más P_k y $(100–k)$ por ciento de los valores son mayores o iguales que P_k. Más específicamente:

39.21. P_k = el mayor x_s tal que $F_s \leq k/100$. Por lo tanto, Q_L = percentil 25, M = percentil 50, Q_U = percentil 75.

Estadísticos de orden superior

39.22. El r-ésimo momento: (a) $m_r = \frac{1}{n}\Sigma x_i^r$, (b) $m_r = \frac{1}{n}\Sigma f_i x_i^r$

39.23. El r-ésimo momento alrededor de la media $\bar{x}$:

(a) $\mu_r = \frac{1}{n}\Sigma (x_i - \bar{x})^r$, (b) $\mu_r = \frac{1}{n}\Sigma (f_i x_i - \bar{x})^r$

39.24. El r-ésimo momento absoluto alrededor de la media $\bar{x}$:

(a) $\mu_r = \frac{1}{n}\Sigma \left| x_i - \bar{x} \right|^r$, (b) $\mu_r = \frac{1}{n}\Sigma \left| f_i x_i - \bar{x} \right|^r$

39.25. El r-ésimo momento en unidades estándar z alrededor de $z = 0$:

(a) $\alpha_r = \frac{1}{n}\Sigma z_i^r$, (b) $\alpha_r = \frac{1}{n}\Sigma f_i z_i^r$ donde $z_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$

Medidas de asimetría y curtosis

39.26. Coeficiente de asimetría: $\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \alpha_3$

39.27. Asimetría de momentos: $\frac{\mu_3}{2\sigma^3}$

39.28. Coeficiente de curtosis: $\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$

39.29. Coeficiente de exceso de curtosis: $\alpha_4 - 3 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$

39.30. Coeficiente de asimetría por cuartiles: $\frac{Q_U - 2\hat{x} + Q_L}{Q_U - Q_L} = \frac{Q_3 - 2Q_2 + Q_1}{Q_3 - Q_1}$

Varianza y desviación estándar poblacionales

Recordemos que N denota el número de elementos de la población.

39.31. Varianza poblacional: $\sigma^2 = \frac{\Sigma (x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}{N}$

39.32. Desviación estándar poblacional: $\sigma = \sqrt{\text{Varianza}} = \sqrt{\sigma^2}$

Datos bivariados

Las siguientes fórmulas son válidas para una lista de pares de valores numéricos:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots, (x_n, y_n)$$

donde la primera entrada corresponde a una variable x y la segunda a una variable y. El principal objetivo es determinar si existe alguna relación matemática, por ejemplo, una relación lineal entre los datos.

El *diagrama de dispersión* es simplemente una imagen de los pares de valores como puntos en un plano coordenado.

Coeficiente de correlación

Un indicador numérico de la presencia de una relación lineal entre las variables x y y es el *coeficiente de correlación muestral* r de x y y, que se define a continuación:

39.33. Coeficiente de correlación muestral: $$r = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \Sigma(y_i - \bar{y})^2}}$$

Suponemos que el denominador de la fórmula 39.33 es distinto de cero. Una fórmula alterna para el cálculo del coeficiente r es

39.34. $$r = \frac{\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)/n}{\sqrt{\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2/n}\sqrt{\Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2/n}}$$

Las propiedades del coeficiente de correlación r son

39.35. (1) $-1 \leqslant r \leqslant 1$ o equivalentemente, $|r| \leqslant 1$.
(2) r es positivo o negativo de acuerdo a si y tiende a incrementarse o a disminuir conforme x se incrementa.
(3) Entre más cercano sea $|r|$ a 1, más fuerte es la relación lineal entre x y y.

La *covarianza muestral* de x y y se define como

39.36. Covarianza muestral: $$s_{xy} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

La fórmula 39.33 puede reescribirse de forma más concisa mediante el uso de la covarianza muestral:

39.37. $$r = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

donde s_x y s_y son las desviaciones estándar muestrales de x y y, respectivamente.

EJEMPLO 39.2: Consideremos la siguiente tabla de datos:

x	50	45	40	38	32	40	55
y	2.5	5.0	6.2	7.4	8.3	4.7	1.8

El diagrama de dispersión de los datos aparece en la figura 39-1. El coeficiente de correlación r de los datos puede calcularse construyendo primero la tabla en la figura 39-2. Luego, por la fórmula 39.34 con $n = 7$,

$$r = \frac{1431.8 - (300)(35.9)/7}{\sqrt{13\,218 - (300)^2/7}\sqrt{218.67 + (35.9)^2/7}} \approx -0.9562$$

Por lo tanto r es cercano a -1, el diagrama de dispersión de la figura 39-1 efectivamente muestra una fuerte relación lineal negativa entre x y y.

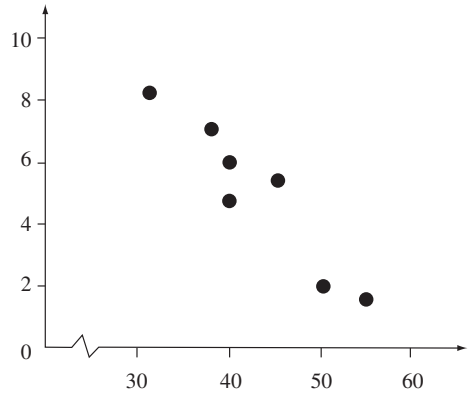


Fig. 39-1

	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
	50	2.5	2500	6.25	125.0
	45	5.0	2025	25.00	225.0
	40	6.2	1600	38.44	248.0
	38	7.4	1444	54.76	281.2
	32	8.3	1024	68.89	265.6
	40	4.7	1600	22.09	188.0
	55	1.8	3025	3.24	99.0
Sumas	300	35.9	13 218	218.67	1 431.8

Fig. 39-2

Regresión lineal

Considere un conjunto de datos de n puntos $P_i\,(x_i, y_i)$. Cualquier recta (no vertical) L está definida mediante una ecuación de la forma:

$$y = a + bx$$

Sea y_i^* el valor y del punto en L que corresponde a x_i; es decir, sea $y_i^* = a + bx_i$. Luego, defina:

$$d_i = y_i - y_i^* = y_i - (a + bx_i)$$

esto es, d_i es la distancia vertical (dirigida) entre el punto P_i y la recta L. El *error cuadrático* entre la recta L y los datos se define como sigue:

39.38. $\Sigma d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$

La *recta de mínimos cuadrados* o la *recta de mejor ajuste* o la *recta de regresión* de y sobre x es, por definición, la recta L cuyos errores cuadráticos son mínimos. Puede demostrarse que tal recta siempre existe y es única.

Las constantes a y b en la ecuación $y = a + bx$ de la recta de mejor ajuste L pueden obtenerse de las siguientes dos ecuaciones *normales*, donde a y b son las incógnitas y n es el número de puntos:

39.39. $$\begin{cases} na + (\Sigma x_i)b = \Sigma y_i \\ (\Sigma x_i)a + (\Sigma x_i^2)b = \Sigma x_i y_i \end{cases}$$

La solución a las ecuaciones normales anteriores es

39.40. $$b = \frac{n\Sigma x_i y_i - (\Sigma x_i)(\Sigma y_i)}{n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2} = \frac{rs_y}{s_x}; \qquad a = \frac{\Sigma y_i}{n} - b\frac{\Sigma x_i}{n} = \overline{y} - b\overline{x}$$

La segunda ecuación nos dice que el punto $(\overline{x}, \overline{y})$ pertenece a la recta L y la primera ecuación nos dice que el punto $(\overline{x} + s_x, \overline{y} + rs_y)$ también pertenece a la recta L.

EJEMPLO 39.3: Supongamos que queremos encontrar la recta L de mejor ajuste para los datos del ejemplo 39.2. A partir de la tabla en la figura 39-2 y con $n = 7$, obtenemos las ecuaciones normales:

$$7a + 300b = 35.9$$
$$300a + 13\,218b = 1\,431.8$$

Al sustituir en la fórmula 39.40 obtenemos:

$$b = \frac{7(1\,431.8) - (300)(35.9)}{7(13\,218) - (300)^2} = -0.2959$$
$$a = \frac{35.9}{7} - (-0.2959)\frac{300}{7} = 17.8100$$

de modo que la recta L de mejor ajuste es:

$$y = 17.8100 - 0.2959x$$

La gráfica de L aparece en la figura 39-3.

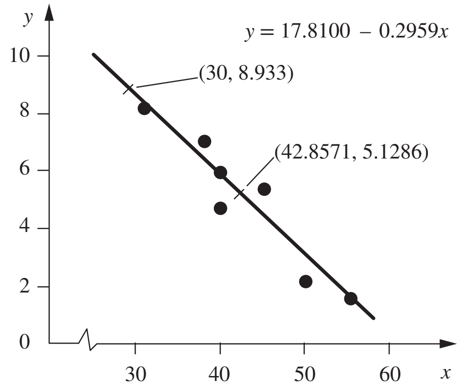


Fig. 39-3

Ajuste de curvas

Supongamos que se nos dan n puntos $P_i\,(x_i, y_i)$ tales que (utilizando el diagrama de dispersión o el coeficiente de correlación r) no indican una relación lineal entre las variables x y y, sin embargo sí sugiere que otro tipo de curva estándar (es decir, bien conocida) con ecuación $y = f(x)$ aproximaría a los datos. Entonces la curva C que en particular se usa para aproximar los datos, llamada *curva de mejor ajuste* o la *curva de mínimos cuadrados*, es la curva que minimiza la suma de los errores al cuadrado:

$$\Sigma d_i^2 = d_1^2 + d_2^2 + \cdots + d_n^2$$

donde $d_i = y_i - f(x_i)$. A continuación presentamos tres curvas de este tipo.

Función polinomial de grado m: $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_m x^m$

Los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m$ del polinomio de mejor ajuste se pueden obtener al resolver el siguiente sistema de $m + 1$ ecuaciones normales:

39.41.
$$\begin{aligned} na_0 + a_1 \Sigma x_i + a_2 \Sigma x_i^2 + \cdots + a_m \Sigma x_i^m &= \Sigma y_i \\ a_0 \Sigma x_i + a_1 \Sigma x_i^2 + a_2 \Sigma x_i^3 + \cdots + a_m \Sigma x_i^{m+1} &= \Sigma x_i y_i \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\cdots\cdots\cdots \\ a_0 \Sigma x_i^m + a_1 \Sigma x_i^{m+1} + a_2 \Sigma x_i^{m+2} + \cdots + a_m \Sigma x_i^{2m} &= \Sigma x_i^m y_i \end{aligned}$$

Curva exponencial: $y = ab^x$ o $\log y = \log a + (\log b)x$

La curva exponencial se usa si el diagrama de dispersión de $\log y$ contra x sugiere una relación lineal. Luego $\log a$ y $\log b$ se obtienen de los datos transformados. La recta L de mejor ajuste para los datos transformados $P'(x_i, \log y_i)$ es:

39.42.
$$\begin{cases} na' + (\Sigma x_i)b' = \Sigma(\log y_i) \\ (\Sigma x_i)a' + (\Sigma x_i^2)b' = \Sigma(x_i \log y_i) \end{cases}$$

Entonces $a = \text{antilog } a'$, $b = \text{antilog } b'$.

EJEMPLO 39.4: Consideremos los siguientes datos que sugieren crecimiento exponencial:

x	1	2	3	4	5	6
y	6	18	55	160	485	1460

Entonces buscamos la recta L de mínimos cuadrados para el conjunto de datos:

x	1	2	3	4	5	6
$\log y$	0.7782	1.2553	1.7404	2.2041	2.6857	3.1644

Al usar la ecuación normal 39.42 para L obtenemos:

$$a' = 0.3028, \quad b' = 0.4767$$

Los antilogaritmos de a' y b' dan, aproximadamente,

$$a = 2.0, \qquad b = 3.0$$

Por lo tanto, $y = 2(3^x)$ es la curva exponencial buscada C. Los datos y C se ilustran en la figura 39-4.

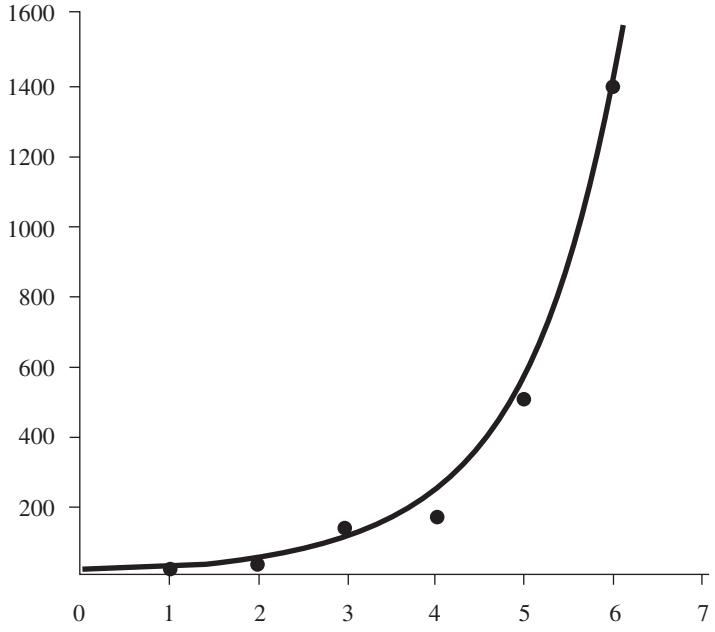


Fig. 39-4

Función de potencia: $y = ax^b$ o $\log y = \log a + b \log x$
Una curva de una potencia se usa si el diagrama de dispersión de $\log y$ contra x sugiere una relación lineal. $\log a$ y $\log b$ se obtienen de los datos transformados. La recta L de mejor ajuste para los datos transformados $P'(\log x_i, \log y_i)$ es:

39.43.
$$\begin{cases} na' + \Sigma(\log x_i)b = \Sigma(\log y_i) \\ \Sigma(\log x_i)a' + \Sigma(\log x_i)^2 b = \Sigma(\log x_i \log y_i) \end{cases}$$

Entonces $a = \text{antilog } a'$.

40 PROBABILIDAD

Espacio muestral y eventos

Un *espacio muestral* S es un conjunto que consiste en todos los posibles resultados de un experimento, donde los eventos son subconjuntos de S. El mismo espacio muestral S es un evento llamado el *evento seguro*, y el conjunto vacío $\varnothing$ es el *evento imposible*.

Sería conveniente si todo subconjunto de S fuera un evento. Desafortunadamente, esto llevaría a contradicciones cuando se define una función de probabilidad sobre eventos. De modo que los eventos se definen como una colección C limitada de subconjuntos de S como sigue:

DEFINICIÓN 40.1: La clase C de todos los eventos de un espacio muestral S forman un σ-campo. Esto es, satisface las siguientes propiedades:

(i) $S \in C$.
(ii) Si $A_1, A_2, \ldots$ pertenecen a la clase C, entonces la unión de ellos $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$ pertenece a C.
(iii) Si $A \in C$, entonces su complemento $A^c \in C$.

Aunque en la definición anterior nunca se mencionan complementos, la ley de DeMorgan (40.3) nos dice que el complemento de una unión es la intersección de sus complementos. Por lo que los eventos forman una colección cerrada bajo uniones, intersecciones y complementos de sucesiones numerables.

Si S es finito la clase de todos los subconjuntos de S forma un σ-campo. Sin embargo, si S no es numerable, entonces sólo algunos subconjuntos de S pueden ser eventos. De hecho, si B es la colección de todos los intervalos abiertos en la recta real $\mathbf{R}$, entonces el σ-campo más pequeño que contiene a B es la colección de conjuntos de Borel en $\mathbf{R}$.

Si la condición (ii) de la definición 40.1 de un σ-campo se reemplaza por uniones finitas, entonces la clase de subconjuntos de S se dice un *campo*. De modo que un σ-campo es un campo, pero no viceversa.

Primero, por completez, listamos las propiedades básicas de las operaciones entre conjuntos unión, intersección y complemento.

40.1. Todos los conjuntos satisfacen las propiedades de la tabla 40-1.

TABLA 40-1 Leyes del álgebra de conjuntos

Leyes de idempotencia:	(1a) $A \cup A = A$	(1b) $A \cap A = A$
Leyes de asociatividad:	(2a) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	(2b) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
Leyes de conmutatividad:	(3a) $A \cup B = B \cup A$	(3b) $A \cap B = B \cap A$
Leyes de distributividad:	(4a) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	(4b) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap B)$
Leyes de identidad:	(5a) $A \cup \varnothing = A$ (6a) $A \cup \mathbf{U} = \mathbf{U}$	(5b) $A \cap \mathbf{U} = A$ (6b) $A \cap \varnothing = \varnothing$
Ley de involución:	(7a) $(A^C)^C = A$	
Leyes de los complementos:	(8a) $A \cup A^c = \mathbf{U}$ (9a) $\mathbf{U}^c = \varnothing$	(8b) $A \cap A^c = \varnothing$ (9b) $\varnothing^c = U$
Leyes de DeMorgan:	(10a) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$	(10b) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

40.2. Los siguientes son equivalentes: (i) $A \subseteq B$, (ii) $A \cap B = A$, (iii) $A \cap B = B$.
Recordemos que la unión e intersección de cualquier colección de conjuntos se define como sigue:

$$\bigcup_j A_j = \{x \mid \text{existe j tal que } x \in A_j\} \quad \text{y} \quad \bigcap_j A_j = \{x \mid \text{para todo j se tiene que } x \in A_j\}$$

40.3. (Ley de DeMorgan generalizada) (10a)'$(\bigcup_j A_j)^c = \bigcap_j A_j^c$; (10b)'$(\bigcap_j A_j)^c = \bigcup_j A_j^c$

Espacios de probabilidad y funciones de probabilidad

DEFINICIÓN 40.2: Sea P una función con valores reales definida en la clase *C* de eventos de un espacio muestral S, entonces se dice que P es una *función de probabilidad*, y P(A) es la *probabilidad* de un evento A, siempre que se cumplan los siguientes axiomas:

Axioma [P_1] Para todo evento A, $P(A) \geq 0$.

Axioma [P_2] El evento seguro S cumple que $P(S) = 1$.

Axioma [P_3] Para cualquier sucesión de eventos mutuamente ajenos (disjuntos) $A_1, A_2, \ldots$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots$$

La tripleta S, *C*, P o simplemente S cuando se sobreentienden *C* y P, se llama *espacio de probabilidad*.

El **axioma [P_3]** implica un axioma análogo para cualquier número finito de conjuntos. Esto es,

Axioma [P_3'] Para cualquier colección finita de eventos mutuamente ajenos $A_1, A_2, \ldots, A_n$,

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n)$$

En particular, para dos eventos disjuntos A y B tenemos que $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Las siguientes propiedades se siguen directamente de los axiomas anteriores.

40.4. (Regla del complemento) $P(A^c) = 1 - P(A)$. Entonces, $P(\varnothing) = 0$.

40.5. (Regla de la diferencia) $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

40.6. (Regla de la adición) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

40.7. Para $n \geq 2$, $P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$

40.8. (Regla de monotonía) Si $A \subseteq B$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

Límites de sucesiones de eventos

40.9. (Continuidad) Supongamos que $A_1, A_2, \ldots$ es una sucesión monótona creciente (decreciente) de eventos; esto es, $A_j \subseteq A_{j+1}$ ($A_j \supseteq A_{j+1}$). Sea $A = \cup_j A_j$ ($A = \cap_j A_j$). Entonces el lím $P(A_n)$ existe y

$$\lim P(A_n) = P(A)$$

Para cualquier sucesión de eventos $A_1, A_2, \ldots$, definimos:

$$\lim \inf A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} \bigcap_{j=k}^{+\infty} A_j \qquad \text{y} \qquad \lim \sup A_n = \bigcap_{k=1}^{+\infty} \bigcup_{j=k}^{+\infty} A_j$$

Si lím inf A_n = lím sup A_n, entonces le llamamos conjunto lím A_n. Notemos que lím A_n existe cuando la sucesión es monótona.

40.10. Para cualquier sucesión de eventos A_j en un espacio de probabilidad,

$$P(\text{lím inf } A_n) \leq \text{lím inf } P(A_n) \leq \text{lím sup } P(A_n) \leq P(\text{lím sup } A_n)$$

Por lo que si lím A_n existe, entonces $P(\text{lím } A_n) = \text{lím } P(A_n)$.

40.11. Para cualquier sucesión de eventos A_j en un espacio de probabilidad, $P(\cup_j A_j) \leq \sum_j P(A_j)$.

40.12. (Lema de Borel-Cantelli) Supongamos que A_j es cualquier sucesión de eventos en un espacio de probabilidad. Supongamos que $\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) < +\infty$. Entonces $P(\text{lím sup } A_n) = 0$.

40.13. (Teorema de extensión) Sea F un campo de subconjuntos de S. Sea P una función sobre F que satisface los axiomas $\mathbf{P_1}$, $\mathbf{P_2}$ y $\mathbf{P_3}'$. Entonces existe una única medida de probabilidad P^* en el σ-campo más pequeño que contiene a F tal que P^* coincide con P en F.

Probabilidad condicional

DEFINICIÓN 40.3: Sea E un evento con $P(E) > 0$. La probabilidad condicional de un evento A dado E se denota y define como sigue:

$$P(A|E) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

40.14. (Teorema de multiplicación para la probabilidad condicional) $P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$. Este teorema puede generalizarse como sigue:

40.15. $P(A_1 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \ldots P(A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1})$

EJEMPLO 40.1: Un lote contiene 12 artículos de los cuales cuatro son defectuosos. Tres artículos son escogidos al azar del lote uno a uno. Encuentre la probabilidad de que los tres no sean defectuosos.

La probabilidad de que el primer artículo no sea defectuoso es 8/12. Si suponemos que el primer artículo no es defectuoso, la probabilidad que el segundo no sea defectuoso es 7/11. Al asumir que el primero y el segundo artículos no son defectuosos, la probabilidad de que el tercer artículo no sea defectuoso es 6/10. Por lo que,

$$p = \frac{8}{12} \cdot \frac{7}{11} \cdot \frac{6}{10} = \frac{14}{55}$$

Procesos estocásticos y diagramas de árbol

Un *proceso estocástico* (finito) es una sucesión finita de experimentos donde cada experimento tiene un número finito de resultados con probabilidades dadas. Una forma conveniente de describir dicho proceso es por medio de un diagrama de árbol o árbol de probabilidad, ilustrado más adelante, donde el teorema de multiplicación (fórmula 40.14) se utiliza para calcular la probabilidad de un evento representado por un camino dado en el árbol.

EJEMPLO 40.2: Sean X, Y, Z tres monedas en una caja, donde X es una moneda justa con dos caras: águila y sol, Y tiene dos águilas, y Z está cargada de tal forma que la probabilidad de que caiga águila es 1/3. Una moneda se selecciona al azar y se lanza. (a) Encuentre P(A), la probabilidad de que caiga águila. (b) Encuentre P(X|A) la probabilidad de que la moneda justa X haya sido seleccionada dado que cayó águila.

El diagrama de árbol que corresponde al proceso estocástico de dos pasos se ilustra en la figura 40-1a.

(a) El águila cae en tres de los caminos (de izquierda a derecha); de donde,

$$P(A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{11}{18}$$

(b) X y águila A aparecen solamente a lo largo del camino superior; de donde,

$$P(X \cap A) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{6} \text{ y } P(X|A) = \frac{P(X \cap A)}{P(A)} = \frac{1/6}{11/18} = \frac{3}{11}$$

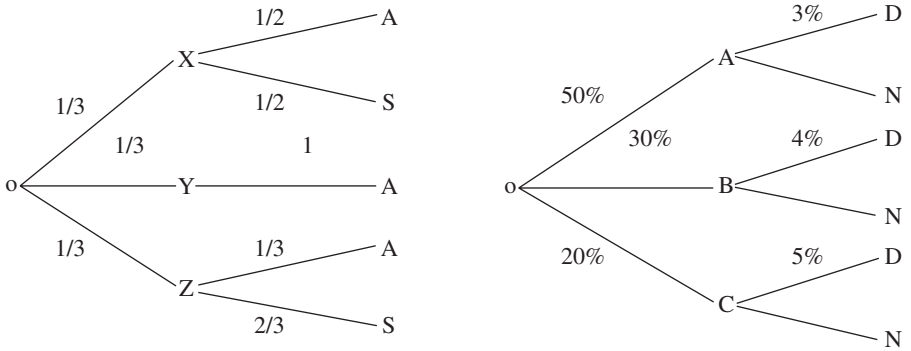


Fig. 40-1

Ley de probabilidad total y teorema de Bayes

Supongamos que E es un evento en un espacio muestral S, y A_1, A_2, … A_n son eventos mutuamente ajenos cuya unión es S; esto es, los eventos A_1, A_2, …, A_n forman una partición de S.

40.16. (Ley de probabilidad total) $P(E) = P(A_1)P(E|A_1) + P(A_2)P(E|A_2) + \ldots + P(A_n)P(E|A_n)$

40.17. (Fórmula de Bayes) Para k = 1, 2, …, *n*,

$$P(A_k|E) = \frac{P(A_k)P(E\,|\,A_k)}{P(E)} = \frac{P(A_k)P(E\,|\,A_k)}{P(A_1)P(E\,|\,A_1) + P(A_2)P(E\,|\,A_2) + \cdots + P(A_n)P(E\,|\,A_n)}$$

EJEMPLO 40.3: Tres máquinas, A, B, C, producen, respectivamente, 50, 30 y 20% del número total de artículos producidos en una fábrica. Los porcentajes de artículos defectuosos que produce cada máquina son, respectivamente, 3, 4 y 5%. Un artículo se selecciona al azar.

(a) Encontrar P(D), la probabilidad de que el artículo sea defectuoso.

(b) Si el artículo es defectuoso, encontrar la probabilidad de que provino de la máquina: (i) A, (ii) B, (iii) C.

(a) Por la fórmula **40.16** (ley de probabilidad total),

$$\begin{aligned} P(D) &= P(A)P(D|A) + P(B)P(D|B) + P(C)P(D|C) \\ &= (0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05) = 3.7\% \end{aligned}$$

(b) Por la fórmula **40.17** (regla de Bayes), (i) $P(A|D) = \dfrac{P(A)P(D\,|\,A)}{P(D)} = \dfrac{(0.50)(0.03)}{0.037} = 40.5\%$. Similarmente,

(ii) $P(B|D) = \dfrac{P(B)P(D\,|\,B)}{P(D)} = 32.5\%$; (iii) $P(C|D) = \dfrac{P(C)P(D\,|\,C)}{P(D)} = 27.0\%$

De forma alterna, podemos considerar este problema como un proceso estocástico de dos pasos con un diagrama de árbol, como en la figura 40-1(b). Encontramos P(D) al sumar las probabilidades de los tres posibles caminos hacia D:

$$(0.50)(0.03) + (0.30)(0.04) + (0.20)(0.05) = 3.7\%$$

Encontramos P(A|D) al dividir el camino superior a A y D por la suma de los tres caminos hacia D.

$$(0.50)(0.03)/0.037 = 40.5\%$$

De manera similar, encontramos P(B|D) = 32.5% y P(C|D) = 27.0%.

Eventos independientes

DEFINICIÓN 40.4: Los eventos A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

40.18. Las siguientes expresiones son equivalentes:
(i) $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, (ii) $P(A|B) = P(A)$, (iii) $P(B|A) = P(B)$.

Esto es, los eventos A y B son independientes si la ocurrencia de uno de ellos no influye en la ocurrencia del otro.

EJEMPLO 40.4: Consideramos los siguientes eventos para una familia con hijos, donde suponemos que el espacio muestral S es un espacio equiprobable:

$$E = \{\text{hijos de ambos sexos}\}, \qquad F = \{\text{a lo más un niño}\}$$

(a) Muestre que E y F son eventos independientes si la familia tiene tres hijos.

(b) Muestre que E y F son eventos dependientes si la familia tiene dos hijos.

(a) Aquí S = {bbb, bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb, ggg}. Por lo que

$$E = \{bbg, bgb, bgg, gbb, gbg, ggb\},\ P(E) = 6/8 = 3/4,$$
$$F = \{bgg, gbg, ggb, ggg\},\ P(F) = 4/8 = 1/2$$
$$E \cap F = \{bgg, gbg, ggb\},\ P(E \cap F) = 3/8$$

Por lo tanto, $P(E)P(F) = (3/4)(1/2) = 3/8 = P(E \cap F)$ y con ello E y F son independientes.

(b) Aquí S = {bb, bg, gb, gg}. Por lo que

$$E = \{bg, gb\},\ P(E) = 2/4 = 1/2,$$
$$F = \{bg, gb, gg\},\ P(F) = 3/4$$
$$E \cap F = \{bg, gb\},\ P(E \cap F) = 2/4 = 1/2$$

Por lo tanto, $P(E)P(F) = (1/2)(3/4) = 3/8 \neq P(E \cap F)$ y con ello E y F son dependientes.

DEFINICIÓN 40.5: Para $n > 2$, los eventos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si cualquier subconjunto propio de ellos es independiente y

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n)$$

Observamos que en esta definición se utiliza inducción.

DEFINICIÓN 40.6: Una colección $\{A_j \mid j \in J\}$ de eventos es independiente si, para toda $n > 0$, los conjuntos $A_{j_1}, A_{j_2}, \ldots, A_{j_n}$ son independientes.

El concepto de *repeticiones independientes*, cuando S es finito, se formaliza a continuación.

DEFINICIÓN 40.7: El espacio de probabilidad de S repeticiones independientes o intentos independientes, denotado por S_n, consiste en n-tuplas ordenadas $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ de elementos de S donde la probabilidad de una n-tupla definida por

$$P((s_1, s_2, \ldots, s_n)) = P(s_1)P(s_2) \ldots P(s_n)$$

EJEMPLO 40.5: Supongamos que siempre que los caballos a, b, c participan en una carrera juntos, las probabilidades de que ganen son 20, 30 y 50% respectivamente. Esto es, S = {a, b, c} con P(a) = 0.2, P(b) = 0.3, y P(c) = 0.5.

Los caballos participan en tres carreras distintas. Encuentre la probabilidad de que

(a) el mismo caballo gane las tres carreras
(b) cada caballo gane una vez

(a) Al escribir *xyz* en vez de (x, y, z), buscamos la probabilidad del evento A = {aaa, bbb, ccc}. Aquí,

$$P(aaa) = (0.2)^3 = 0.008, P(bbb) = (0.3)^3 = 0.027, P(ccc) = (0.5)^3 = 0.125$$

De donde, P(A) = 0.008 + 0.027 + 0.125 = 0.160.

(b) Buscamos la probabilidad del evento B = {abc, acb, bac, bca, cab, cba}. Cada elemento en B tiene la misma probabilidad (0.2)(0.3)(0.5) = 0.03. Por lo tanto, P(B) = 6(0.03) = 0.18.

41 VARIABLES ALEATORIAS

Consideremos un espacio de probabilidad (S, C, P).

DEFINICIÓN 41.1: Una variable aleatoria X en el espacio muestral S es una función de S en el conjunto **R** de números reales tal que la preimagen de cada intervalo de **R** es un evento de S.

Si S es un espacio muestral discreto en el cual cada subconjunto de S es un evento, entonces cada función real valuada sobre S es una variable aleatoria. Por otro lado, si S es no numerable, entonces algunas funciones con valores reales sobre S podrían no ser variables aleatorias.

Sea X una variable aleatoria sobre S, donde denotamos con R_X al rango de X; esto es,

$$R_X = \{x \mid \text{existe un } s \in \text{S tal que } X(s) = x\}$$

Hay dos casos que tratamos por separado. (i) X es una variable aleatoria discreta; esto es, R_X es finito o numerable. (ii) X es una variable aleatoria continua; esto es, R_X es un continuo de números, como un intervalo o una unión de intervalos.

Sean X y Y variables aleatorias sobre el mismo espacio muestral S. Entonces, como es usual, $X + Y$, $X + k$, kX, y XY, (donde k es un número real) son las funciones sobre S definidas como sigue (donde s es cualquier punto en S):

$$(X + Y)(s) = X(s) + Y(s), \qquad (kX)(s) = kX(s),$$
$$(X + k)(s) = X(s) + k, \qquad (XY)(s) = X(s)Y(s).$$

De forma más general, para cualquier polinomio, función exponencial o función continua $h(t)$ definimos $h(X)$ como la función definida sobre S como:

$$[h(X)](s) = h[X(s)]$$

Se puede mostrar que estas también son variables aleatorias sobre S.

Usamos la siguiente notación:

$P(X = x_i)$	denota la probabilidad de que $X = x_i$.
$P(a \le X \le b)$	denota la probabilidad de que X tome valores en el intervalo cerrado $[a, b]$.
μ_X o E(X) o simplemente μ	denota la media o esperanza de X.
σ_{X^2} o Var(X) o simplemente σ^2	denota la varianza de X.
σ_X o simplemente σ	denota la desviación estándar de X.

Algunas veces consideraremos una variable aleatoria Y tal que $Y = g(X)$, esto es, Y es alguna función de X.

Variables aleatorias discretas

Aquí X es una variable aleatoria con solo un número finito o numerable de valores, digamos $R_X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, donde $x_1 < x_2, < x_3 < \ldots$. Entonces X induce una función $f(x)$ sobre R_X como sigue:

$$f(x_i) = P(X = x_i) = P(\{s \in \text{S} \mid X(s) = x_i\})$$

La función $f(x)$ satisface las siguientes propiedades:

$$\text{(i) } f(x_i) \ge 0 \qquad \text{y} \qquad \text{(ii) } \Sigma_i f(x_i) = 1$$

De modo que f define una función de probabilidad sobre el rango R_X de X. Al par $(x_i, f(x_i))$, usualmente dado por una tabla, se le da el nombre de *distribución de probabilidad* o *función de masa de probabilidad* de X.

Media

41.1. $\mu_X = \mathrm{E}(X) = \Sigma x_i f(x_i)$

Aquí, $Y = g(X)$.

41.2. $\mu_Y = \mathrm{E}(Y) = \Sigma g(x_i) f(x_i)$

Aquí, $Y = g(X)$.

Varianza y desviación estándar

41.3. $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \Sigma(x_i - \mu)^2 f(x_i) = \mathrm{E}((X - \mu)^2)$

De forma alterna, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ puede obtenerse como sigue:

41.4. $\mathrm{Var}(X) = \Sigma x_i^2 f(x_i) - \mu^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$

41.5. $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathrm{E}(X^2) - \mu^2}$

OBSERVACIÓN: Tanto la varianza $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ como la desviación estándar σ miden la dispersión ponderada de los valores x_i alrededor de la media μ; sin embargo, la desviación estándar tiene las mismas unidades que μ.

EJEMPLO 41.1: Supongamos que X tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	2	4	6	8
$f(x)$	0.1	0.2	0.3	0.4

Entonces:

$$\mu = \mathrm{E}(X) = \Sigma x_i f(x_i) = 2(0.1) + 4(0.2) + 6(0.3) + 8(0.4) = 6$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \Sigma x_i^2 f(x_i) = 2^2(0.1) + 4^2(0.2) + 6^2(0.3) + 8^2(0.4) = 40$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = 40 - 36 = 4$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{4} = 2$$

Variables aleatorias continuas

Aquí X es una variable aleatoria que toma valores en un continuo. Por lo que X determina una función $f(x)$, llamada *función de densidad* de X, tal que

$$\text{(i) } f(x) \geq 0 \qquad \text{y} \qquad \text{(ii) } \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_R f(x)\,dx = 1$$

Aún más,

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Media

41.6. $\mu_X = \mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\,dx$

Aquí, $Y = g(X)$.

41.7. $\mu_Y = \mathrm{E}(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) f(x)\,dx$

Aquí, $Y = g(X)$.

Varianza y desviación estándar

41.8. $\sigma_X^2 = \mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f(x)dx = \mathrm{E}((X-\mu)^2)$

De forma alterna, $\mathrm{Var}(X) = \sigma^2$ puede obtenerse como sigue:

41.9. $\mathrm{Var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - \mu^2 = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2$

41.10. $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathrm{E}(X^2) - \mu^2}$

EJEMPLO 41.2: Sea X la variable aleatoria continua con la siguiente función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} (1/2)x & si\ 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{para cualquier otro valor de } x \end{cases}$$

Entonces:

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{6}\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$

$$\mathrm{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^3\,dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_0^2 = 2$$

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mu^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9}$$

$$\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{2}$$

Función de distribución acumulada

La *función de distribución acumulada* $F(x)$ de una variable aleatoria X es la función $F:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definida por:

41.11. $F(a) = P(X \le a)$

La función F está bien definida pues la imagen inversa del intervalo $(-\infty, a]$ es un evento.

La función $F(x)$ satisface las siguientes propiedades:

41.12. $F(a) \le F(b)$ siempre que $a \le b$.

41.13. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$

Esto es, $F(x)$ es monótona, y el límite por la izquierda de F es 0 mientras que el límite por la derecha es 1.

Si X es la variable aleatoria discreta con distribución $f(x)$, entonces $F(x)$ es la siguiente función escalón:

41.14. $F(x) = \sum_{x_i \le x} f(x_i)$

Si X es una variable aleatoria continua, entonces la función de densidad $f(x)$ de X puede obtenerse al derivar la función de distribución acumulada $F(x)$. Esto es,

41.15. $f(x) = \dfrac{d}{dx}F(x) = F'(x)$

De acuerdo con lo anterior, para una variable aleatoria continua X

41.16. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$

Distribución binomial

Consideremos un experimento con dos posibles resultados, a uno le llamamos *éxito* (E) y al otro le llamamos *fracaso* (F). A un número fijo de repeticiones independientes de un experimento así se le llama *experimento binomial*. La notación:

$$B(n, p)$$

denota un experimento binomial con n intentos independientes y una probabilidad de éxito p. Con $q = 1 - p$, se denota la probabilidad de rechazo.

41.17. $P(k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ es la probabilidad de k éxitos en $B(n, p)$ donde $\binom{n}{k}$ es el coeficiente binomial.

41.18. La probabilidad de al menos un éxito en $B(n, p)$ es $1 - q^n$.
El número X de k éxitos en $B(n, p)$ es una variable aleatoria con la siguiente distribución, denominada *distribución binomial*.

k	0	1	2	...	$n-1$	n
$P(k)$	q^n	$\binom{n}{1} p\, q^{n-1}$	$\binom{n}{2} p^2 q^{n-2}$	...	$\binom{n}{n-1} p^{n-1} q$	p^n

41.19. Media de $B(n, p) = \mu = np$.

41.20. Varianza de $B(n, p) = \sigma^2 = npq$, y la desviación estándar de $B(n, p) = \sigma = \sqrt{npq}$

EJEMPLO 41.3:

(a) Juana acierta en el blanco con probabilidad $p = 1/3$. De modo que $q = 2/3$. Ella dispara $n = 6$ veces. La probabilidad de acertar en el blanco exactamente dos veces es:

$$P(2) = \binom{6}{2}(1/3)^2(2/3)^4 = 15(1/9)(16/81) = 80/243 = 0.329$$

(b) Juan acierta en el blanco con probabilidad $p = 1/4$. De modo que $q = 3/4$. Él dispara $n = 100$ veces. El número esperado μ de veces que acertará en el blanco y la desviación estándar σ son

$$\mu = np = 100(1/4) = 25;\ \sigma^2 = npq = 100(1/4)(3/4) = 75/4, \text{ entonces } \sigma = 2.5$$

Distribución normal

La *variable aleatoria normal* X, cuya función de densidad f tiene la famosa curva de campana, ilustrada en la figura 41-1, se define como

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \quad \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$$

Esta distribución se denota por $N(\mu, \sigma^2)$.

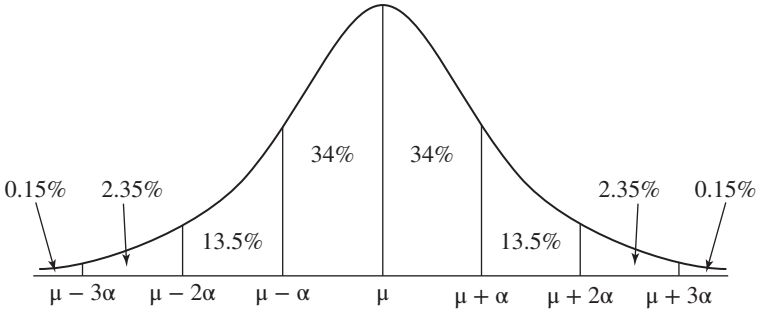


Fig. 41-1

41.21. Media de $N(\mu, \sigma^2) = \mu$.

41.22. Varianza de $N(\mu, \sigma^2) = \sigma^2$, y la desviación estándar de $N(\mu, \sigma^2) = \sigma$.

Regla 68-95-99.7

La distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$ sigue la **regla 68-95-99.7** que se ilustra en la figura 41-1. Esta es:

(a) Aproximadamente 68% (si somos precisos 68.3%) de los datos (población) o un poco más de dos tercios de ellos se concentran, a lo más, a una desviación estándar de la media.

(b) Aproximadamente 95% (si somos precisos 95.4%) de los datos (población) se concentran, a lo más, a dos desviaciones estándar de la media.

(c) Aproximadamente 99.7% de los datos (población) se concentran, a lo más, a tres desviaciones estándar de la media.

Distribución normal estandarizada

Para una variable aleatoria $X = N(\mu, \sigma^2)$ se tiene la variable aleatoria estandarizada

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

la cual es también normal pero con media $\mu = 0$ y desviación estándar $\sigma = 1$. Es decir $Z = N(0, 1)$. La función de densidad ϕ de Z es:

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad e^{-z^2/2}$$

Cualquier valor x de una variable aleatoria normal X puede escribirse como un valor z mediante la fórmula: $z = (x - \mu)/\sigma$.

Evaluación de probabilidades de la normal estándar

La tabla 36 da el área bajo la curva normal estándar $\phi(z)$ entre 0 y z, como se ilustra en la figura de la tabla. Esta área se denota por $\Phi(z)$.

Si usamos la tabla 36 y la simetría de la curva, podemos hallar $P(z_1 \le Z \le z_2)$, el área bajo la curva entre cualesquiera dos valores z_1 y z_2, como se ilustra en la figura 41-2 a continuación:

(a) $z_1 < 0 < z_2$ (b) $0 < z_1 < z_2$ (c) $z_1 < z_2 < 0$

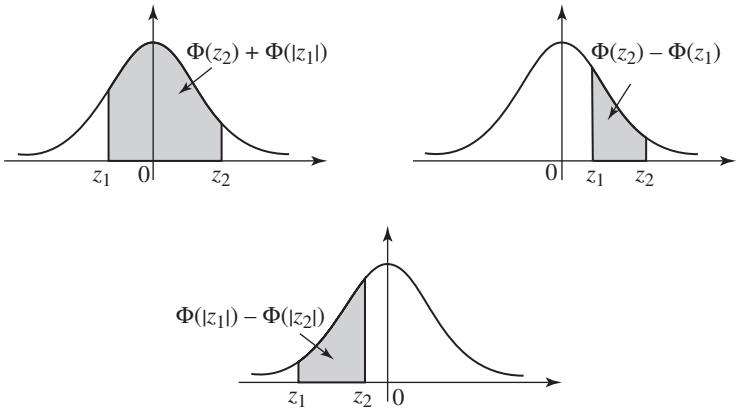


Fig. 41-2

EJEMPLO 41.4: Encuentre las siguientes probabilidades:

(a) $P(-0.5 \le Z \le 1.3)$, (b) $P(1.4 \le Z \le 2.0)$, (c) $P(-1.5 \le Z \le -0.8)$

(a) $P(-0.5 \le Z \le 1.3) = \Phi(1.3) + \Phi(0.5) = 0.4032 + 0.1915 = 0.5947 = 59.47\%$.

(b) $P(1.4 \le Z \le 2.0) = \Phi(2.0) - \Phi(1.4) = 0.4772 - 0.4192 = 0.0580 = 5.80\%$

(c) $P(-1.5 \le Z \le -0.8) = \Phi(1.5) - \Phi(0.8) = 0.4332 - 0.2881 = 0.1451 = 14.51\%$

Si usamos el hecho de que el área total bajo la curva normal estándar es 1 y que la mitad del área es 1/2 = 0.5000, podemos encontrar la "cola" de la probabilidad de z como se muestra en la figura 41-3:

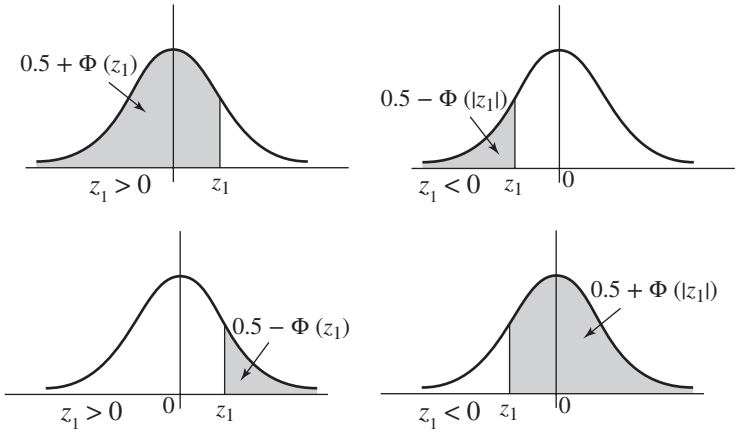


Fig. 41-3

(a) $P(Z < z_1)$ (b) $P(Z > z_1)$

EJEMPLO 41.5: Encuentre las siguientes probabilidades:

(a) $P(Z \le 1.3)$ (b) $P(Z \ge 1.5)$, (c) $P(Z \ge -1.4)$,

(a) $P(Z \le 1.3) = 0.5 + \Phi(1.3) = 0.5000 + 0.4032 = 0.9032$.

(b) $P(Z \ge 1.5) = 0.5 - \Phi(1.5) = 0.5000 - 0.4332 = 0.0668 = 6.68\%$

(c) $P(Z \le -1.6) = 0.5 - \Phi(1.6) = 0.5000 - 0.4452 = 0.0548 = 5.48\%$

Evaluación de probabilidades de una normal arbitraria

Supongamos que X es una variable aleatoria con distribución normal $N(\mu, \sigma^2)$. Para evaluar $P(a \le X \le b)$ primero expresamos a y b en unidades estándar mediante

$$z_1 = \frac{a-\mu}{\sigma} \text{ y } z_2 = \frac{b-\mu}{\sigma}$$

Luego reescribimos $P(a \le X \le b)$ en términos de ecuación de z:

$$P(a \le X \le b) = P(z_1 \le Z \le z_2)$$

que es el área bajo la curva normal estándar entre z_1 y z_2.

EJEMPLO 41.6: Suponga que las estaturas de los hombres estadounidenses (en pulgadas) se distribuyen (aproximadamente) en forma normal con media $\mu = 68$ y desviación estándar $\sigma = 2$. Encuentre el porcentaje P de hombres estadounidenses que tienen una estatura.

(a) entre $a = 67$ y $b = 71$ pulgadas, (b) por lo menos de 6 pies (72 pulgadas)

(a) Transformamos a y b a unidades estándar y obtenemos

$$z_1 = (67 - 68)/2 = -0.5 \text{ y } z_2 = (71 - 68)/2 = 1.5$$

Aquí $< 0 < z_2$. Por lo tanto,

$$P = P(67 \le X \le 71) = P(-0.5 \le Z \le 1.5)$$
$$= \Phi(1.5) + \Phi(0.5) = 0.4332 + 0.1915 = 0.6247$$

Esto significa que aproximadamente 62.5% de los hombres estadounidenses tienen una estatura entre 67 y 71 pulgadas.

(b) Transformamos $a = 72$ a unidades estándar y obtenemos $z = (72 - 68)/2 = 2.0$. Aquí $0 < z$. Por lo que

$$P = P(X \ge 72) = P(Z \ge 2) = 0.5 - \Phi(2.0) = 0.5000 - 0.4772 = 0.0228$$

Esto es, aproximadamente 2.3% de los hombres estadounidenses tienen al menos 6 pies de altura.

Teorema del límite central

A grandes rasgos, el teorema del límite central (TLC) establece que en cualquier sucesión de intentos repetidos, la distribución de la media muestral normalizada se aproxima a la distribución normal estándar a medida que se incrementa el número de intentos.

41.23. Teorema del límite central: Sean $X_1, X_2, X_3, \ldots$ una sucesión de variables aleatorias independientes idénticamente distribuidas con media μ y varianza σ^2. Sea:

$$\overline{X}_n = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n \text{ y } Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$$

Entonces para n suficientemente grande y cualquier intervalo $\{a \le x \le b\}$,

$$P(a \le Z_n \le b) \approx P(a \le \phi \le b)$$

donde ϕ es la distribución normal estándar.

Distribuciones de probabilidad adicionales

41.24. Distribución Poisson: $\Phi(x) = \sum_{t \le x} \frac{\lambda^t e^{-\lambda}}{t!}$

41.25. Distribución hipergeométrica: $\Phi(x) = \sum_{t \le x} z \frac{\binom{r}{t}\binom{s}{n-t}}{\binom{r+s}{n}}$

41.26. Distribución t de Student: $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{n\pi}} \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(n/2)} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-(n+1)/2} dt$

41.27. Distribución χ^2 (chi cuadrada): $\Phi(x) = \dfrac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(n/2)} \displaystyle\int_0^x t^{(n-2)/2} e^{-t/2}\, dt$

41.28. Distribución F: $\Phi(x) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{n_1+n_2}{2}\right) n_1^{n_1/2}\, n_2^{n_2/2}}{\Gamma(n_1/2)\Gamma(n_2/2)} \displaystyle\int_0^x t^{(n_1/2)-1} (n_2 + n_1 t)^{-(n_1+n_2)/2}\, dt$

42 INTERPOLACIÓN

Interpolación de Lagrange

Fórmula de dos puntos

42.1. $$p(x) = f(x_0)\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + f(x_1)\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}$$

donde $p(x)$ es un polinomio lineal para la interpolación de dos puntos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad x_0 \neq x_1$$

Fórmula general

42.2. $$p(x) = f(x_0)L_{n,0}(x) + f(x_1)L_{n,1}(x) + \cdots + f(x_n)L_{n,n}(x)$$

donde

$$L_{n,k} = \prod_{i=0, i\neq k}^{n} \frac{x - x_i}{x_k - x_i}$$

y $p(x)$ es un polinomio de interpolación de orden n para interpolar $n + 1$ puntos:

$$(x_k, f(x_k)), \quad k = 0, 1, \ldots, n; \quad \text{y} \quad x_i \neq x_j \text{ para } i \neq j$$

Fórmula del residuo

Supongamos que $f(x) \in C^{n+1}[a, b]$. Entonces existe un $\xi(x) \in (a, b)$ tal que

42.3. $$f(x) = p(x) + \frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

Interpolación de Newton

Fórmula de cociente de diferencias de primer orden

42.4. $$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fórmula de interpolación de dos puntos

42.5. $$p(x) = f(x_0) + f[x_0, x_1](x - x_0)$$

donde $p(x)$ es un polinomio lineal para la interpolación de dos puntos:

$$(x_0, f(x_0)), \quad (x_1, f(x_1)), \quad x_0 \neq x_1$$

Fórmula de cociente de diferencias de segundo orden

42.6. $$f[x_0,x_1,x_2]=\frac{f[x_1,x_2]-f[x_0,x_1]}{x_2-x_0}$$

Fórmula de interpolación de tres puntos

42.7. $$p(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+f[x_0,x_1,x_2](x-x_0)(x-x_1)$$

y $p(x)$ es un polinomio cuadrático para la interpolación de tres puntos:

$$(x_0,f(x_0)),\quad (x_1,f(x_1)),\quad (x_2,f(x_3))$$

Fórmula general del cociente de diferencias de *k*-ésimo orden

42.8. $$f[x_0,x_1,\ldots,x_k\}=\frac{f[x_1,x_2,\ldots,x_k]-f[x_0,x_1,\ldots,x_{k-1}]}{x_k-x_0}$$

Fórmula general de interpolación

42.9. $$p(x)=f(x_0)+f[x_0,x_1](x-x_0)+\cdots+f[x_0,x_1,\ldots,x_n](x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})$$

donde $p(x)$ es un polinomio de interpolación de orden n para interpolar $n+1$ puntos:

$$(x_k,f(x_k)),\quad k=0,1,\ldots,n;\quad \text{y}\quad x_i\neq x_j \text{ para } i\neq j$$

Fórmula del residuo

Supongamos que $f(x)\in C^{n+1}[a,b]$. Entonces existe un $\xi(x)\in(a,b)$ tal que

42.10. $$f(x)=p(x)+\frac{f^{n+1}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_n)$$

Fórmula de diferencias de Newton

Diferencia de primer orden en x_0

42.11. $$\Delta f(x_0)=f(x_1)-f(x_0)$$

Diferencia de segundo orden en x_0

42.12. $$\Delta^2 f(x_0)=\Delta f(x_1)-\Delta f(x_0)$$

Diferencia de *k*-ésimo orden en x_0

42.13. $$\Delta^k f(x_0)=\Delta^{k-1} f(x_1)-\Delta^{k-1} f(x_0)$$

Coeficiente binomial

42.14. $$\binom{s}{k}=\frac{s(s-1)\cdots(s-k+1)}{k!}$$

Fórmula de diferencias de Newton

42.15. $$p(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\Delta^k f(x_0)$$

donde $p(x)$ es un polinomio de interpolación de orden n para interpolar $n+1$ puntos equidistantes:

$$(x_k,f(x_k)),\ x_k=x_0+kh\quad k=0,1,\ldots,n$$

Fórmula de diferencias regresivas de Newton

Diferencia regresiva de primer orden en x_n

42.16. $\nabla f(x_n) = f(x_n) - f(x_{n-1})$

Diferencia regresiva de segundo orden en x_n

42.17. $\nabla^2 f(x_n) = \nabla f(x_n) - \nabla f(x_{n-1})$

Diferencia regresiva de k-ésimo orden en x_n

42.18. $\nabla^k f(x_n) = \nabla^{k-1} f(x_n) - \nabla^{k-1} f(x_{n-1})$

Fórmula de diferencias regresivas de Newton

42.19. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \nabla^k f(x_n)$

donde $p(x)$ es un polinomio de interpolación de orden n para interpolar $n + 1$ puntos equidistantes:

$$(x_k, f(x_k)),\ x_k = x_0 + kh \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Interpolación de Hermite

Polinomios base para dos puntos

42.20. $H_{1,0} = \left(1 - 2\dfrac{x - x_0}{x_0 - x_1}\right)\dfrac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}, \quad H_{1,1} = \left(1 - 2\dfrac{x - x_1}{x_1 - x_0}\right)\dfrac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$

$$\hat{H}_{1,0} = (x - x_0)\frac{(x - x_1)^2}{(x_0 - x_1)^2}, \quad \hat{H}_{1,1} = (x - x_1)\frac{(x - x_0)^2}{(x_1 - x_0)^2}$$

Fórmula de interpolación de dos puntos

42.21. $H_3(x) = f(x_0)H_{1,0} + f(x_1)H_{1,1} + f'(x_0)\hat{H}_{1,0} + f'(x_1)\hat{H}_{1,1}$

donde $H_3(x)$ es un polinomio de orden tres que coincide con $f(x)$ y su primera derivada en dos puntos, por ejemplo:

$$H_3(x_0) = f(x_0), \quad H_3'(x_0) = f'(x_0), \qquad H_3(x_1) = f(x_1), \quad H_3'(x_1) = f'(x_1)$$

Polinomios base generales

42.22. $H_{n,j} = \left(1 - 2\dfrac{x - x_j}{L_{n,j}'(x_j)}\right) L_{n,j}^2(x), \quad \hat{H}_{n,j} = (x - x_j) L_{n,j}^2(x)$

donde

$$L_{n,j} = \prod_{i=0, i\neq j}^{n} \frac{x - x_i}{x_j - x_i}$$

Fórmula general de interpolación

42.23. $$H_{2n+1}(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j) H_{n,j}(x) + \sum_{j=0}^{n} f'(x_j) \hat{H}_{n,j}(x)$$

donde $H_{2n+1}(x)$ es un polinomio de orden $(2n + 1)$ que coincide con $f(x)$ y su primera derivada en $n + 1$ puntos, es decir,

$$H_{2n+1}(x_k) = f(x_k),\ H'_{2n+1}(x_k) = f'(x_k) \qquad k = 0, 1, \ldots, n$$

Fórmula del residuo

Supongamos que $f(x) \in C^{2n+2}[a,b]$. Entonces existe un $\xi(x) \in (a,b)$ tal que

42.24. $$f(x) = H_{2n+1}(x) + \frac{f^{2n+2}(\xi(x))}{(2n+2)!}(x - x_0)^2 (x - x_1)^2 \cdots (x - x_n)^2$$

43 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Regla del trapecio

Regla del trapecio

43.1. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]$$

Regla del trapecio compuesta

43.2. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih)+f(b)\right)$$

donde $h=(b-a)/n$ es la longitud de cada subintervalo.

Regla de Simpson

Regla de Simpson

43.3. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{b-a}{6}\left[f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

Regla de Simpson compuesta

43.4. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left(f(x_0)+2\sum_{i=2}^{n/2} f(x_{2i-2})+4\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1})+f(x_n)\right)$$

donde n es par, $h=(b-a)/n$, $x_i=a+ih$, $i=0, 1, \ldots, n$.

Regla del punto medio

Regla del punto medio

43.5. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx (b-a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

Regla del punto medio compuesta

43.6. $$\int_a^b f(x)\,dx \approx 2h\sum_{i=0}^{n/2} f(x_{2i})$$

donde n es par, $h=(b-a)/(n+2)$, $x_i=a+(i-1)h$, $i=-1, 0, \ldots, n+1$.

Cuadratura de Gauss

Polinomio de Legendre

43.7. $$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}[(x^2-1)^n]$$

Fórmulas de las abscisas y los coeficientes de ponderación

Las abscisas $x_k^{(n)}$ y los coeficientes de ponderación $\omega_k^{(n)}$ se definen como sigue:

43.8. $x_k^{(n)}$ = el k-ésimo cero del polinomio de Legendre $P_n(x)$

43.9. $$\omega_k^{(n)} = \frac{2P_n'(x_k^{(n)})^2}{1-x_k^{(n)^2}}$$

Las tablas para las abscisas y los coeficientes de ponderación de Gauss-Legendre pueden encontrarse en la figura 43-1.

Fórmula de Gauss-Legendre para el intervalo (–1, 1)

43.10. $$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) + R_n$$

Fórmula de Gauss-Legendre para un intervalo general (*a*, *b*)

43.11. $$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}\sum_{k=1}^{n} \omega_k^{(n)} f\left(\frac{a+b}{2} + x_k^{(n)}\frac{b-a}{2}\right) + R_n$$

Fórmula del residuo

43.12. $$R_n = \frac{(b-a)^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^3} f^{(2n)}(\xi)$$

para algún $a < \xi < b$.

n	$x_k^{(n)}$	$\omega_k^{(n)}$
2	0.5773502692	1.0000000000
	–0.5773502692	1.0000000000
3	0.7745966692	0.5555555556
	0.0000000000	0.8888888889
	–0.7745966692	0.5555555556
4	0.8611363116	0.3478548451
	0.3399810436	0.6521451549
	–0.3399810436	0.6521451549
	–0.8611363116	0.3478548451
5	0.9061798459	0.2369268850
	0.5384693101	0.4786286705
	–0.0000000000	0.5688888889
	–0.5384693101	0.4786286705
	–0.9061798459	0.2369268850

Fig. 43-1

44 SOLUCIÓN DE ECUACIONES NO LINEALES

A continuación daremos métodos para resolver ecuaciones no lineales de dos tipos:

44.1. Ecuación no lineal: $f(x) = 0$

44.2. Ecuación no lineal de punto fijo: $x = g(x)$
Es posible transformar una ecuación de la forma 44.1 a la 44.2 o viceversa mediante el siguiente cambio:

$$g(x) = f(x) + x \quad \text{o} \quad f(x) = g(x) - x$$

Dado que los métodos son iterativos, existen dos formas de estimar el error:

44.3. $|f(x_n)| < \epsilon \quad \text{o} \quad |x_{n+1} - x_n| < \epsilon$

para algún $\epsilon > 0$ previamente elegido.

Método de bisección

El siguiente teorema es válido:
Teorema del valor intermedio: supongamos que f es una función continua sobre un intervalo $[a, b]$ y $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe una raíz x^* de $f(x) = 0$ en (a, b)
El método de bisección aproxima alguna de estas soluciones x^*.

44.4. Método de bisección:
Paso inicial: hacer $a_0 = a$ y $b_0 = b$.
Paso iterativo:

(a) Hacer $c_n = (a_n + b_n)/2$.

(b) Si $f(a_n)f(c_n) < 0$, entonces hacer $a_{n+1} = a_n$ y $b_{n+1} = c_n$; en otro caso, hacer $a_{n+1} = c_n$ y $b_{n+1} = b_n$.

Método de Newton

Método de Newton

44.5. $$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Convergencia cuadrática

44.6. $$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^2} = \frac{f''(x^*)}{2(f'(x^*))^2}$$

donde x^* es una raíz de la ecuación no lineal 44.1.

Método de la secante

Método de la secante

44.7. $$x_{n+1} = x_n - \frac{(x_n - x_{n-1}) f(x_n)}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

Razón de convergencia

44.8. $$\lim_{n \to \infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|\,|x_{n-1} - x^*|} = \frac{f''(x^*)}{2(f'(x^*))^2}$$

donde x^* es una raíz de la ecuación no lineal 44.1.

Método iterativo de punto fijo

La siguiente definición y el siguiente teorema son válidos:

DEFINICIÓN 44.1: Una función g de (a, b) a (a, b) se llama *mapeo de contracción* si

$$|g(x) - g(y)| \leq L\,|x - y| \qquad \text{para cualquier } x,\ y \in (a, b)$$

donde $L < 1$ es una constante positiva.

Teorema del punto fijo: supongamos que g es un mapeo de contracción sobre (a, b). Entonces g tiene un único punto fijo en (a, b).

Dado un mapeo de contracción g, se puede usar el siguiente método.

Método iterativo de punto fijo

44.9. $$x_{n+1} = g(x_n)$$

45 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

A continuación damos métodos para resolver el siguiente problema de valor inicial de una ecuación diferencial ordinaria:

45.1. $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Los métodos utilizan una cuadrícula de cómputo:

45.2. $t_n = t_0 + nh$

donde h es el tamaño de la cuadrícula.

Métodos de primer orden

Método de Euler (método explícito de primer orden)

45.3. $x(t+h) = x(t) + hf(x(t), t)$

Método regresivo de Euler (método implícito de primer orden)

45.4. $x(t+h) = x(t) + hf(x(t+h), t+h)$

Métodos de segundo orden

Regla del punto medio (método explícito de segundo orden)

45.5. $$\begin{cases} x^* = x(t) + \dfrac{h}{2} f(x(t), t) \\ x(t+h) = x(t) + hf\left(x^*, t + \dfrac{h}{2}\right) \end{cases}$$

Regla del trapecio (método implícito de segundo orden)

45.6. $x(t+h) = x(t) + \dfrac{h}{2}\{f(x(t), t) + f(x(t+h), t+h)\}$

Método de Heun (método explícito de segundo orden)

45.7. $$\begin{cases} x^* = x(t) + hf(x(t), t) \\ x(t+h) = x(t) + \dfrac{h}{2}\{f(x(t), t) + f(x^*, t+h)\} \end{cases}$$

Métodos de orden superior de un solo paso

Método de Runge-Kutta de cuarto orden (método explícito de cuarto orden)

45.8. $x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4)$

donde

$$F_1 = hf(x, t), \quad F_2 = hf\left(x + \frac{F_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right), \quad F_3 = hf\left(x + \frac{F_2}{2}, t + \frac{h}{2}\right), \quad F_4 = hf(x + F_3, t + h)$$

Métodos de orden superior de pasos múltiples

Método de Adams-Bashforth de dos pasos

45.9. $x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{3}{2}f(x(t), t) - \frac{1}{2}f(x(t-h), t-h)\right)$

Método de Adams-Bashforth de tres pasos

45.10. $x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{23}{12}f(x(t), t) - \frac{4}{3}f(x(t-h), t-h) + \frac{5}{12}f(x(t-2h),\ t-2h)\right)$

Método de Adams-Bashforth de cuatro pasos

45.11. $x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{55}{24}f(x(t),t) - \frac{59}{24}f(x(t-h),t-h) + \frac{37}{24}f(x(t-2h),t-2h) - \frac{9}{24}f(x(t-3h),t-3h)\right)$

Método de Milne

45.12. $x(t+h) = x(t-3h) + h\left(\frac{8}{3}f(x(t), t) - \frac{4}{3}f(x(t-h), t-h) + \frac{8}{3}f(x(t-2h), t-2h)\right)$

Método de Adams-Moulton de dos pasos

45.13. $x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{5}{12}f(x(t+h), t+h) + \frac{2}{3}f(x(t), t) - \frac{1}{12}f(x(t-h), t-h)\right)$

Método de Adams-Moulton de tres pasos

45.14. $x(t+h) = x(t) + h\left(\frac{3}{8}f(x(t+h),t+h) + \frac{19}{24}f(x(t),t) - \frac{5}{24}f(x(t-h),t-h) + \frac{1}{24}f(x(t-2h),t-3h)\right)$

46 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Método de diferencias finitas para la ecuación de Poisson

La siguiente es la ecuación de Poisson en el domino $(a, b) \times (c, d)$:

46.1. $\nabla^2 u = f, \quad \nabla^2 = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$

Condiciones de frontera:

46.2. $u(x, y) = g(x, y)$ para $x = a, b$ o $y = c, d$

Cuadrícula de cómputo:

46.3. $x_i = a + i\Delta x$ para $i = 0, 1, \ldots, n$
$y_j = c + j\Delta y$ para $j = 0, 1, \ldots, m$

donde $\Delta x = (b - a)/n$ y $\Delta y = (d - c)/m$ son los tamaños de la cuadrícula para las variables x y y, respectivamente.

Aproximación por diferencias de segundo orden

46.4. $(D_x^2 + D_y^2)u(x_i, y_j) = f(x_i, y_j)$

donde

$$D_x^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j)}{\Delta x^2}$$

$$D_y^2 u(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1})}{\Delta y^2}$$

Condiciones de frontera de cómputo

46.5. $u(x_0, y_j) = g(a, y_j), \quad u(x_n, y_j) = g(b, y_j)$ para $j = 1, 2, \ldots, m$
$u(x_i, y_0) = g(x_i, c), \quad u(x_i, y_m) = g(x_i, d)$ para $i = 1, 2, \ldots, n$

Método de diferencias finitas para la ecuación de calor

La siguiente es la ecuación de calor en el domino $(a, b) \times (c, d) \times (0, T)$:

46.6. $\dfrac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u$

Condiciones de frontera:

46.7. $u(x, y, t) = g(x, y)$ para $x = a, b$ o $y = c, d$

Condición inicial:

46.8. $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

Cuadrícula de cómputo:

46.9. $x_i = a + i\Delta x$ para $i = 0,1,\ldots,n$
$y_j = c + j\Delta y$ para $j = 0,1,\ldots,m$
$t_k = k\Delta t$ para $k = 0,1,\ldots,$

donde $\Delta x = (b - a)/n$, $\Delta y = (d - c)/m$, y Δt son los tamaños de la cuadrícula para las variables x, y y t, respectivamente.

Condiciones de frontera de cómputo

46.10. $u(x_0, y_j) = g(a, y_j), u(x_n, y_j) = g(b, y_j)$ para $j = 1,2,\ldots, m$
$u(x_i, y_0) = g(x_i, c), u(x_i, y_m) = g(x_i, d)$ para $i = 1,2,\ldots, n$

Condición inicial de cómputo

46.11. $u(x_i, y_j, 0) = u_0(x_i, y_j)$ para $i = 1, 2,\ldots, n; j = 0, 1,\ldots, m$

Método de Euler con condición de estabilidad

46.12. $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u(x_i, y_j, t_k) + \Delta t(D_x^2 + D_y^2)u(x_i, y_j, t_k)$

46.13. $\dfrac{2\Delta t}{\Delta x^2} + \dfrac{2\Delta t}{\Delta y^2} \le 1$

Método regresivo de Euler (incondicionalmente estable)

46.14. $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u(x_i, y_j, t_k) + \Delta t(D_x^2 + D_y^2)u(x_i, y_j, t_{k+1})$

Método de Crank-Nicholson (incondicionalmente estable)

46.15. $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = u(x_i, y_j, t_k) + \Delta t(D_x^2 + D_y^2)\{u(x_i, y_j, t_k) + u(x_i, y_j, t_{k+1})\}/2$

Método de diferencias finitas para la ecuación de onda

La siguiente es la ecuación de onda en el dominio $(a, b) \times (c, d) \times (0, T)$:

46.16. $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = A^2 \nabla^2 u$

donde A es una constante que representa la rapidez de la onda.

Condición de frontera:

46.17. $u(x, y, t) = g(x, y)$ para $x = a, b$ o $y = c, d$

Condición inicial:

46.18. $u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} u(x, y, 0) = u_1(x, y)$

Cuadrícula de cómputo:

46.19.
$$x_i = a + i\Delta x \quad \text{para } i = 0, 1, \ldots, n$$
$$y_j = c + j\Delta y \quad \text{para } j = 0, 1, \ldots, m$$
$$t_k = k\Delta t \quad \text{para } k = -1, 0, 1, \ldots$$

donde $\Delta x = (b - a)/n$, $\Delta y = (d - c)/m$, y Δt son los tamaños de la cuadrícula para las variables x, y, y t, respectivamente.

Aproximación por diferencias finitas de segundo orden

46.20. $u(x_i, y_j, t_{k+1}) = 2u(x_i, y_j, t_k) - u(x_i, y_j, t_{k-1}) + \Delta t^2 A^2 (D_x^2 + D_y^2) u(x_i, y_j, t_k)$

Condiciones de frontera de cómputo

46.21.
$$u(x_0, y_j) = g(a, y_j), u(x_n, y_j) = g(b, y_j) \quad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m$$
$$u(x_i, y_0) = g(x_i, c), u(x_i, y_m) = g(x_i, d) \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n$$

Condición inicial de cómputo

46.22. $u(x_i, y_j, t_0) = u_0(x_i, y_j)$ para $i = 1, 2, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m$

$$u(x_i, y_j, t_{-1}) = u_0(x_i, y_j) + \Delta t^2 u_1(x_i, y_j) \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n; j = 0, 1, \ldots, m$$

Condición de estabilidad

46.23. $\Delta t \leq A \min(\Delta x, \Delta x)$

47 MÉTODOS ITERATIVOS PARA SISTEMAS LINEALES

Métodos iterativos para la ecuación de Poisson

La aproximación por diferencias finitas de la ecuación de Poisson es:

47.1. $$\begin{cases} u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = f_{i,j} & \text{para } i, j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ u_{0,j} = u_{n,j} = 0 & \text{para } j = 1, 2, \ldots, n-1 \\ u_{i,0} = u_{i,n} = 0 & \text{para } i = 1, 2, \ldots, n-1 \end{cases}$$

Presentamos tres métodos iterativos para resolver este sistema:

Método de Jacobi

47.2. $$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k} - f_{i,j})$$

Método de Gauss-Seidel

47.3. $$u_{i,j}^{k+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{k+1} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{k+1} - f_{i,j})$$

Método de sobrerrelajación sucesiva (SOR)

47.4. $$\begin{cases} u_{i,j}^{*} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^{k} + u_{i-1,j}^{*} + u_{i,j+1}^{k} + u_{i,j-1}^{*} - f_{i,j}) \\ u_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)u_{i,j}^{k} + \omega\, u_{i,j}^{*} \end{cases}$$

Métodos iterativos para sistemas lineales generales

Consideramos el siguiente sistema lineal:

47.5. $Ax = b$

donde $\boldsymbol{A}$ es una matriz de $n \times n$ y $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{b}$ son vectores con n coordenadas. Suponemos que la matriz de coeficientes $\boldsymbol{A}$ puede descomponerse como sigue:

47.6. $A = D - L - U$

donde $D = \text{diag}\,(\boldsymbol{A})$, $\boldsymbol{L}$ es el negativo de la parte estrictamente triangular inferior de $\boldsymbol{A}$, y $\boldsymbol{U}$ es el negativo de la parte estrictamente triangular superior de $\boldsymbol{A}$.

A continuación presentamos cuatro métodos iterativos para resolver el sistema:

Método de Richard

47.7. $x^{k+1} = (I - A)x^k + b$

Método de Jacobi

47.8. $Dx^{k+1} = (L + U)x^k + b$

Método de Gauss-Seidel

47.9. $(D - L)x^{k+1} = Ux^k + b$

Método de sobrerrelajación sucesiva (SOR)

47.10. $(D - \omega L)x^{k+1} = \omega(Ux^k + b) + (1 - \omega)Dx^k$

48 DEFINICIONES BÁSICAS, EXPRESIONES

Una *máquina de Turing M* se compone de tres conjuntos disjuntos no vacíos.

(1) Un conjunto finito de símbolos de *cinta* donde $B = a_0$ es el símbolo "en blanco":

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\} \cup \{B\}$$

(2) Un conjunto finito de *estados* donde s_0 es el *estado inicial*:

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n\} \cup \{s_0\} \cup \{s_H, s_Y, s_N\}$$

Aquí s_H (HALT) es el estado de paro, s_Y (YES) es el estado de aceptación y s_N (NO) es el estado de rechazo.

(3) Un conjunto de *direcciones* donde L denota "izquierda" y R denota "derecha":

$$d = \{L, R\}$$

DEFINICIÓN 48.1: Una *expresión* es una sucesión finita (posiblemente vacía) de elementos de $A \cup S \cup d$.

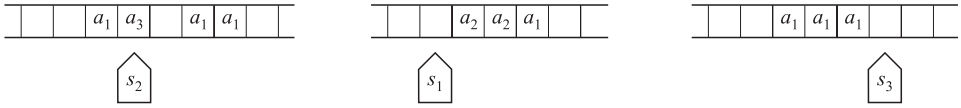
En otras palabras, una expresión es una palabra cuyas letras (símbolos) provienen de los conjuntos A, S y d.

DEFINICIÓN 48.2: Una *expresión de cinta* es una expresión compuesta únicamente por elementos del conjunto de símbolos de cinta A.

49 DESCRIPCIÓN INSTANTÁNEA

La máquina de Turing M puede ser vista como un cabezal de lectura y escritura sobre una cinta infinita que se mueve hacia adelante y hacia atrás. La cinta se divide longitudinalmente en cuadros (celdas), cada cuadro puede contener un símbolo de cinta o estar en blanco. En cada paso de tiempo, la máquina de Turing M se encuentra en algún estado interno s_i mientras explora alguno de los símbolos de cinta a_j sobre la cinta. Suponemos que existe un número finito de símbolos diferentes del símbolo en blanco en la cinta.

La figura 49-1(a) es una imagen de una máquina de Turing M en el estado s_2, mientras explora el segundo símbolo, donde $a_1a_3Ba_1\ a_1$ está escrito sobre la cinta (enfatizamos que B es el símbolo "en blanco"). Esta imagen puede ser representada por la expresión $\alpha = a_1s_2a_3Ba_1a_1$, donde escribimos el estado s_2 de M antes del símbolo de cinta a_3 que M está explorando. Observamos que α es una expresión compuesta solamente por el alfabeto de símbolos de cinta A si no contamos al símbolo de estado s_2, el cual no se encuentra en la parte final de la expresión, pues aparece justo antes del símbolo de cinta a_3 que M está explorando. La figura 49-1 muestra otras dos imágenes informales y sus expresiones correspondientes.



$\alpha = a_1 s_2 a_3 Ba_1 a_1$ (a) $\quad \beta = s_1 Ba_2 a_2 a_1$ (b) $\quad \gamma = a_1 a_1 a_1 s_3 B$ (c)

Fig. 49-1

Las siguientes son las definiciones formales.

DEFINICIÓN 49.1: Una *descripción instantánea* α es una expresión del tipo

$$\alpha = Ps_ia_kQ$$

donde P y Q son expresiones de cinta (posiblemente vacías).

DEFINICIÓN 49.2: Sea $\alpha = Ps_ia_kQ$ una descripción instantánea. Para α se dice que la máquina de Turing M *se encuentra en el estado* s_i *mientras explora la letra* a_k, y que la *expresión sobre la cinta* es la expresión Pa_kQ; es decir, sin el símbolo de estado s_i.

50 QUÍNTUPLAS, MÁQUINAS DE TURING

Como mencionamos anteriormente, en cada paso de tiempo la máquina de Turing M se encuentra en algún estado s_i y explora el símbolo de cinta a_k. La máquina de Turing M es capaz de hacer las siguientes tres acciones simultáneamente:

(i) M borra el símbolo explorado a_k y escribe el símbolo de cinta a_l (donde permitimos que $a_l = a_k$) en su lugar.

(ii) M cambia su estado interno s_i al estado s_j (se permite $s_j = s_i$).

(iii) M se mueve una celda a la izquierda o una celda a la derecha.

Quíntuplas

Las acciónes de M definidas anteriormente pueden describirse mediante una expresión de cinco letras llamada *quíntupla*, la cual definimos a continuación.

DEFINICIÓN 50.1: Una quíntupla q es una expresión de cinco letras de la siguiente forma:

$$q = \left(s_i,\ a_k,\ a_l,\ s_j,\ \begin{Bmatrix} L \\ R \end{Bmatrix} \right)$$

Máquina de Turing

La primera letra de la quíntupla q es un símbolo de estado; el segundo un símbolo de cinta; el tercero un símbolo de cinta; el cuarto un símbolo de cinta; y el último un símbolo de dirección L o R.

La definición formal de una máquina de Turing es la siguiente:

DEFINICIÓN 50.2: Una máquina de Turing M es un conjunto finito de quíntuplas tales que

(i) ningún par de quíntuplas empiezan con las mismas dos letras.

(ii) ninguna quíntupla empieza con s_H, s_Y o s_N.

La condición (i) en la definición garantiza que la máquina M no pueda hacer más que una sola cosa en un paso del tiempo dado, y la condición (ii) garantiza que M se detenga en el estado s_H, s_Y o s_N.

La siguiente es una definición equivalente.

DEFINICIÓN 50.2′: Una máquina de Turing M es una función parcial del conjunto

$$S\backslash\{s_H, s_Y \text{ o } s_N\} \times A \text{ al conjunto } A \times S \times d$$

El término *función parcial* significa simplemente que el dominio de M es un subconjunto de $S\backslash\{s_H, s_Y \text{ o } s_N\} \times A$.

La acción de una máquina de Turing

Ahora podemos describir formalmente la acción de una máquina de Turing.

DEFINICIÓN 50.3: Sean α y β descripciones instantáneas. Escribimos

$$\alpha \to \beta$$

si alguno de los siguientes incisos se cumple para algunas a, b y c símbolos de cinta y P y Q expresiones de cinta (posiblemente vacías):

(i) $\alpha = Ps_iacQ$, $\beta = Pbs_jcQ$ y M contiene la quíntupla $q = s_iabs_jR$.

(ii) $\alpha = Pcs_iaQ$, $\beta = Ps_jcbQ$ y M contiene la quíntupla $q = s_iabs_jL$.

(iii) $\alpha = Ps_ia$, $\beta = Pbs_jB$ y M contiene la quíntupla $q = s_iabs_jR$.

(iv) $\alpha = s_iaQ$, $\beta = s_jBbQ$ y M contiene la quíntupla $q = s_iabs_jL$.

Observamos que, en los cuatro incisos, M reemplaza a en la cinta por b (se permite $b = a$), y M cambia su estado de s_i a s_j (se permite $s_j = s_i$). Aún más:

(i) Aquí M se mueve a la derecha.

(ii) Aquí M se mueve a la izquierda.

(iii) Aquí M se mueve a la derecha; sin embargo, dado que M está explorando la letra del extremo derecho, debe agregar el símbolo en blanco B a la derecha.

(iv) Aquí M se mueve a la izquierda; sin embargo, dado que M está explorando la letra del extremo izquierdo, debe agregar el símbolo en blanco B a la izquierda.

DEFINICIÓN 50.4: Una descripción instantánea α se dice *terminal* si no hay descripción instantánea β tal que $\alpha \rightarrow \beta$.

En particular, cualquier descripción instantánea α en alguno de los tres estados de paro debe ser terminal, ya que ninguna quíntupla puede empezar con s_H, s_Y o s_N.

51 CÓMPUTO CON UNA MÁQUINA DE TURING

La anterior es una descripción estática (un solo paso de tiempo) de una máquina de Turing M. Ahora describiremos su dinámica.

DEFINICIÓN 51.1: Un *cómputo* de una máquina de Turing M es una sucesión de descripciones instantáneas $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ tales que $\alpha_{i-1} \to \alpha_i$, para $i = 1, 2, \ldots, m$ y α_m es una descripción instantánea terminal.

En otras palabras, un cómputo es una sucesión

$$\alpha_0 \to \alpha_1 \to \alpha_2 \to \ldots \to \alpha_m$$

que no puede extenderse más ya que α_m es terminal. Denotamos con term(α) a la descripción instantánea final de un cálculo que empieza con α. Por lo que en el cálculo anterior tenemos que term(α_0) = α_m.

Máquinas de Turing con entradas

Es pertinente la siguiente definición.

DEFINICIÓN 51.2: La *entrada* de una máquina de Turing M es una expresión de cinta W. La *descripción instantánea inicial* de una entrada W es $\alpha(W)$ donde $\alpha(W) = s_0\,(W)$.

Observemos que la descripción instantánea inicial $\alpha(W)$ de la entrada W se obtiene al colocar el estado inicial s_0, frente a la expresión de cinta de entrada W. En otras palabras, la máquina de Turing M empieza en su estado inicial s_0, y explora la primera letra de W.

DEFINICIÓN 51.3: Sea M una máquina de Turing, y sea W una entrada. Decimos que M se detiene en W si existe un cálculo con descripción instantánea inicial $\alpha(W)$.

Esto es, dada una entrada W construimos la descripción inicial $\alpha(W) = s_0\,(W)$ y le aplicamos M para obtener la sucesión

$$\alpha(W) \to \alpha_1 \to \alpha_2 \to \cdots$$

Dos situaciones pueden ocurrir:

(1) ***M* se detiene en *W***. Esto es, la sucesión termina en alguna descripción instantánea α_r.

(2) ***M* no se detiene en *W***. Esto es, la sucesión nunca termina.

Funciones computables

Las funciones computables están definidas sobre el conjunto de enteros no negativos. Algunos libros de texto utilizan **N** para denotar a este conjunto. Nosotros utilizaremos **N** para referirnos al conjunto de enteros positivos, de modo que usaremos la notación

$$\mathbf{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$$

A lo largo de esta sección, los términos *número, entero, y entero no negativo* se utilizan indistintamente. Mostraremos cómo M maneja datos numéricos. Sin embargo, primero debemos ser capaces de representar nuestros números con nuestros símbolos de cinta en A. Escribiremos 1 para el símbolo de cinta a_1 y 1^n para 111 … 1 donde el 1 se repite n veces.

DEFINICIÓN 51.4: Cada número n será representado por la expresión de cinta $\langle n \rangle$ donde $\langle n \rangle = 1^{n+1}$. Por lo que

$$\langle 4 \rangle = 11111 = 1^5, \qquad \langle 0 \rangle = 1, \qquad \langle 2 \rangle = 111 = 1^3.$$

DEFINICIÓN 51.5: Sea E una expresión. Entonces $[E]$ denotará el número de veces que 1 ocurre en E. Por lo que

$$[11Bs_2\, a_3\, 111Ba_4] = 5, \qquad [a_4 s_2 Ba_2] = 0, \qquad [\langle n \rangle] = n + 1.$$

DEFINICIÓN 51.6: Una función f: $\mathbf{N_0} \to \mathbf{N_0}$ es computable si existe una máquina de Turing M tal que, para cada entero n, M se detiene en $\langle n \rangle$ y,

$$f(n) = [\text{term}(\alpha(\langle n \rangle))].$$

En este caso decimos que M computa a f.

Esto es, dada una función f y un entero n, damos como entrada a $\langle n \rangle$ y aplicamos M. Si M se detiene en $\langle n \rangle$ y el número de 1 (unos) en la descripción instantánea final es igual a $f(n)$, entonces f es una función computable y decimos que M computa a f.

52 EJEMPLOS

EJEMPLO 1: Sea M una máquina de Turing. Determine la descripción instantánea α que corresponde a cada situación descrita:

(a) M es en el estado s_3 y explora la tercera letra de la expresión de cinta $w = aabca$.

(b) M es en el estado s_2 y explora la última letra de la expresión de cinta $w = abca$.

(c) La entrada es la expresión de entrada $w = 1^4B1^2$.

La descripción instantánea α se obtiene al colocar el símbolo de estado antes de la letra que será explorada. Inicialmente, M se encuentra en el estado s_0 al explorar la primera letra de una entrada. De modo que

(a) $\alpha = aas_3bca$; (b) $\alpha = abcs_2a$; (c) $\alpha = s_0 1111B11$.

EJEMPLO 2: Supongamos que $\alpha = aas_2ba$ es una descripción instantánea. Encuentre β tal que $\alpha \rightarrow \beta$, si la máquina de Turing M tiene la quíntupla q, donde (a) $q = s_2bas_1L$; (b) $q = s_2bbs_3R$; (c) $q = s_2bas_2R$ y (d) $q = s_3abs_1L$.

(a) Aquí M borra b y escribe a, cambia su estado a s_1, y se mueve a la izquierda. Por lo tanto, $\beta = as_1aaa$.

(b) Aquí M no cambia la letra explorada b, cambia su estado a s_3 y se mueve a la derecha. Por lo tanto, $\beta = aabs_3a$.

(c) Aquí M borra b y escribe a, mantiene su estado en s_2, y se mueve a la derecha. Por lo tanto, $\beta = aaas_2a$.

(d) Aquí q no tiene efecto en α pues q no empieza con s_2b.

Funciones computables

EJEMPLO 3: Encuentre $\langle m \rangle$ si (a) $m = 5$; (b) $m = (4, 0, 3)$; y (c) m = (3, –2, 5).

Recuerde que $\langle n \rangle = 1^{n+1} = 11^n$ y $\langle (n_1, n_2, \ldots \text{ nr }) \rangle = \langle n_1 \rangle B \langle n_2 \rangle B \ldots B \langle n_r \rangle$. Por lo que

(a) $\langle m \rangle = 1^6 = 111111$.

(b) $\langle m \rangle = 1^5B1^1B1^4 = 11111\text{B}1\text{B}1111$.

(c) $\langle m \rangle$ no está definido para enteros negativos.

EJEMPLO 4: Encuentre $[E]$ para las siguientes expresiones:

(a) $E = alls_2Bb111$; (c) $E = \langle m \rangle$ donde $m = (4, 1, 2)$;

(b) $E = aas_3bb$; (d) $E = \langle m \rangle$ donde $m = (n_1, n_2, \ldots, n_r)$.

Recuerde que $[E]$ cuenta el número de 1 (unos) en E. Por lo que

(a) $[E] = 5$; (b) $[E] = 0$; (c) $[E] = 10$ pues $E = 1^5B1^2B1^3$;

(d) $[E] = n_1 + n_2 + \cdots + n_r + r$ pues el número de 1 (unos) con los que contribuye cada n_k a E es $n_k + 1$.

EJEMPLO 5: La función $f(n) = n + 3$ es computable. La entrada es $W = 1^{n+1}$. De modo que sólo debemos agregar dos 1 (unos) a la entrada. Una máquina de Turing M que computa f es

$$M = \{q_1, q_2, q_3\} = \{s_0\ 1s_0L, s_0B1s_1L, s_1B_1s_HL\}$$

Observamos que

(1) q_1 mueve la máquina M a la izquierda.

(2) q_2 escribe 1 en la celda en blanco B y mueve M a la izquierda.

(3) q_3 escribe 1 en la celda en blanco B y detiene a M.

De acuerdo con lo anterior, para cualquier entero positivo n,

$$s_0 1^{n+1} \rightarrow s_0 B 1^{n+1} \rightarrow s_1 B 1^{n+2} \rightarrow s_H B 1^{n+3}$$

Así M computa a $f(n) = n + 3$. Es claro que, para cualquier entero positivo k, la función $f(n) = n + k$ es computable.

EJEMPLO 6: Sea f la función $f(n) = n - 1$, cuando $n > 0$ y $f(0) = 0$. Muestre que f es computable.

Debemos encontrar una máquina de Turing M que compute a f. Específicamente, queremos que M borre dos de los 1 (unos) en la entrada $\langle n \rangle$ cuando $n > 0$, pero sólo un 1 cuando $n = 0$. Esto se logra al considerar las siguientes quíntuplas:

$$q_1 = s_0 1 B s_1 R, \qquad q_2 = s_1 B B s_H R, \qquad q_3 = s_1 1 B s_H R$$

Aquí q_1 borra el primer 1 y mueve M a la derecha. Si hay un solo 1, entonces M explora el símbolo en blanco B y q_2 le dice a la computadora que se detenga. En otro caso, q_3 borra el segundo 1 y detiene a M.

53 PROBABILIDAD BÁSICA

53.1. Variable aleatoria normal estándar Z:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

$$\Phi(x) = P(Z \le x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\, dz$$

53.2. Variable aleatoria normal X:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$$

donde μ es el valor esperado y σ^2 la varianza.

$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma}$ es la variable aleatoria normal estándar.

53.3. Variable aleatoria log-normal Y:

$$Y = e^X, \; X \text{ es una variable aleatoria normal}$$

$$E(Y) = e^{\mu+\sigma^2/2}$$

$$\text{Var } Y = e^{2\mu+2\sigma^2} - e^{2\mu+\sigma^2}$$

53.4. Movimiento browniano a tiempo discreto con coeficiente de deriva μ y parámetro de varianza σ^2, para cualesquiera Δ unidades de tiempo:

$X(t+\Delta) = x(t) + X$, $\quad X$ variable aleatoria normal con $\mu\Delta$ y $\sigma^2\Delta$

53.5. Modelo binomial del movimiento browniano:

$$X(n\Delta) = X(0) + \sigma\sqrt{\Delta}(X_1 + \cdots + X_n)$$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p \\ -1 & \text{con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

donde

$$p = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right)$$

$$E(X(n\Delta) - X(0)) = \mu n\Delta$$

$$\text{Var}\,(X(n\Delta) - X(0)) = \sigma^2 n\Delta - \mu^2 n\Delta^2 \to \sigma^2 t, \text{ como } \Delta \to 0,\; n\Delta \to t$$

Por el teorema del límite central,

$$x(t) - x(0) \sim N(\mu t, \sigma^2 t),$$

$x(t)$ aproxima al movimiento browniano con coeficiente de deriva μ y parámetro de varianza σ^2.

53.6. Movimiento browniano geométrico con coeficiente de deriva μ y parámetro de varianza σ^2:

$$S(t) = e^{X(t)},$$

donde $X(t)$ es un movimiento browniano con parámetro de deriva μ y parámetro de varianza σ^2.

53.7. Movimiento browniano geométrico a tiempo discreto:

$$S(t+\Delta) = S(t)e^{X(t+\Delta)-X(t)}$$

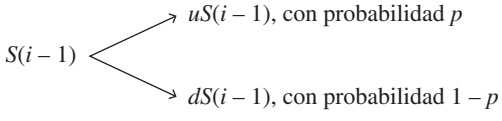
53.8. Modelo binomial para el movimiento browniano geométrico:

$$P = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right), \qquad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

donde p es la probabilidad del factor de incremento u y $1 - p$ la probabilidad del factor de disminución d.

53.9. Modelo multiperiodo binomial de activos:

El precio $S(i)$ de un activo al final del periodo i, $i = 1, 2, \ldots, n$. El periodo es Δ y por lo tanto $t_i = i\Delta$. El precio inicial $S(0)$ no es aleatorio y es fijo. El precio del activo $S(i)$ es aleatorio, se incrementa o disminuye de acuerdo con las siguientes reglas probabilísticas:



54 TASAS DE INTERÉS

54.1. Al pedir prestada una cantidad P (llamada *principal*) a un tiempo T, a una tasa de interés simple r, la cantidad a pagar al tiempo T es $(1 + r)P$.

54.2. Al pedir prestada una cantidad P por un número t de años, a una tasa de interés nominal anual r compuesta continuamente, la cantidad que se debe a los t años es Pe^{rt}.

54.3. El valor presente de un saldo v a pagarse en un periodo i es $v(1+r)^{-i}$.

55 TEOREMA DE ARBITRAJE Y OPCIONES

55.1. Un esquema de inversión de ganancia segura se llama *arbitraje*.

55.2. *Ley del precio único*: si existen dos inversiones con el mismo perfil de pagos, hay un arbitraje o las dos inversiones tienen los mismos costos.

55.3. *Vender en corto*: vender acciones que no se poseen.

55.4. *Opción de compra "call" estilo europeo*: opción de comprar acciones a un precio convenido K (conocido como el *precio de ejercicio*) en la fecha de vencimiento t. El costo de la opción de compra es C.

55.5. *Opción de venta "put" estilo europeo*: opción de vender acciones a un precio convenido K (conocido como el *precio de ejercicio*) en la fecha de expiración t. El costo de la opción de venta es P.

55.6. *Opción de compra estilo americano*: permite al comprador ejercer la opción en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento t.

55.7. Fórmula de paridad *put-call*:

$$S + P - C = Ke^{-rt}$$

Precios sin arbitraje.
Inversión 1: comprar un solo activo, adquirir una sola opción *put* y adquirir una opción *call*. Costos: $S + P - C$.
Inversión 2: colocar Ke^{-rt} dinero en el banco. Costos: Ke^{-rt}. Precios sin arbitraje: $S + P - C = Ke^{-rt}$.

55.8. Precio de una opción de venta estilo americano = Precio de una opción de venta estilo europeo.

55.9. Contrato anticipado F de una acción: en el tiempo 0, se acuerda pagar la cantidad F al tiempo t, por una acción con valor corriente S en dicho tiempo t.

$$F = Se^{rt}$$

Precios sin arbitraje.
Inversión 1: colocar Fe^{-rt} en el banco y comprar un contrato anticipado. Costos: Fe^{-rt}.
Inversión 2: comprar la acción. Costos: S.
Precios sin arbitraje: $Fe^{-rt} = S$.

55.10. Contrato anticipado F en moneda: en el tiempo 0, se acuerda pagar la cantidad F en el tiempo t, por una unidad de moneda extranjera en el tiempo t al tipo de cambio corriente S. La tasa de interés en la moneda extranjera (*foreign*) es r_f, y la tasa de interés en el país local (*home*) es r_h.

$$F = Se^{r_h - r_f}$$

Precios sin arbitraje.
Inversión 1: colocar $Fe^{-r_h t}$ en una cuenta de banco local y comprar un contrato anticipado. Costos: $Fe^{-r_h t}$.
Inversión 2: comprar $e^{-r_f t}$ unidades de moneda extranjera y colocarlas en un banco extranjero. Costos: $Se^{-r_f t}$.
Precios sin arbitraje: $Fe^{-r_h t} = Se^{-r_f t}$.

56 EL TEOREMA DE ARBITRAJE

1. Sean $i = 1,2,\ldots,n$ inversiones.
2. Sean $j = 1,2,\ldots,m$ resultados.
3. Sea $r_i(j)$ el retorno de la inversión i cuando ocurre j.
4. Sea p_j la probabilidad de que ocurra j.
5. Sea x_i la asignación de recursos en la inversión i.
6. Sea r el retorno libre de riesgo.

De acuerdo con el *teorema de arbitraje*, sólo se cumple una de las siguientes condiciones:

1. Existe un vector de probabilidades $p = (p_1,\ldots,p_m)$ tal que, para cada i,

$$\sum_{j=1}^{m} p_j r_i(j) = 0$$

Esta probabilidad se llama la *probabilidad neutral al riesgo*.

2. Existe una asignación de recursos $x = (x_1,\ldots,x_n)$ tal que, para cada j,

$$\sum_{i=1}^{n} x_i r_i(j) > r$$

57 FÓRMULA DE BLACK-SCHOLES

- Movimiento browniano geométrico neutral al riesgo con parámetro de deriva $\mu_m = r - \sigma^2/2$ y parámetro de varianza σ^2:

$$S(t) = e^{X(t)},$$

  donde $X(t)$ es un movimiento browniano con parámetro de deriva $\mu_m = r - \sigma^2/2$ y parámetro de varianza σ^2.
- Bajo el movimiento browniano geométrico neutral al riesgo, $S(t)/S(0)$ es una variable aleatoria log-normal con parámetro de media $(r - \sigma^2/2)t$ y parámetro de varianza $\sigma^2 t$.
- El costo de no arbitraje de una opción *call* para comprar cobertura al tiempo t por el precio especificado K es:

$$C = e^{-rt}E\left[(S(t) - K)_+\right] = e^{-rt}E\left[(S(0)e^W - K)_+\right]$$

  donde W es una variable aleatoria normal con media $(r - \sigma^2/2)t$ y varianza $\sigma^2 t$.
- Fórmula de Black-Scholes para determinar el precio de opciones:

$$C(S,t,K,\sigma,r) = S\Phi(\omega) - Ke^{-rt}\Phi\left(\omega - \sigma\sqrt{t}\right)$$

$$\omega = \frac{rt + \sigma^2/2 - \log(K/S)}{\sigma\sqrt{t}}$$

  donde $\Phi(x)$ es la función de distribución normal estándar.
- Fórmula para *put* estilo europeo:

$$P(S,t,K,\sigma,r) = C(S,t,K,\sigma,r) + Ke^{-rt} - S$$

  Modelo multiperiodo binomial de precios accionarios neutral al riesgo.
- Probabilidad neutral al riesgo:

$$p_m = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{r - \sigma^2/2}{\sigma}\sqrt{\Delta}\right), \qquad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

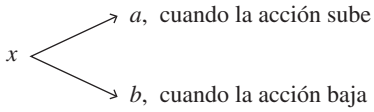
  El precio $S(i)$ de una acción al final del periodo i, $i = 1, 2, \ldots, n$. El periodo es Δ, y por lo tanto $t_i = i\Delta$. El precio inicial $S(0)$ no es aleatorio y es fijo. El precio de la acción $S(i)$ es aleatorio, se incrementa o disminuye de acuerdo a las reglas probabilísticas:

$$S(i-1) \begin{cases} \nearrow uS(i-1), \text{ con probabilidad } p \\ \searrow dS(i-1), \text{ con probabilidad } 1-p \end{cases}$$

- Propiedades del costo de la opción de Black-Scholes:
  1. C es creciente en S, t, σ y r.
  2. C es decreciente en K.
  3. C es una función convexa de S y K.

58 LA ESTRATEGIA DE ARBITRAJE DE COBERTURA DELTA

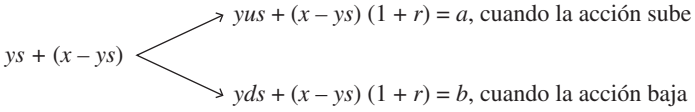
- La siguiente es una opción general para un modelo binomial de precios accionarios con pagos:



  La tasa de interés para el periodo es r. El precio de la opción es

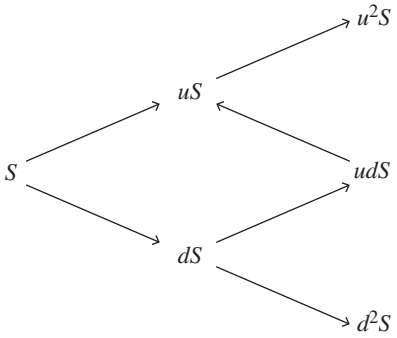
$$x = (pa + (1-p)b)/(1+r), \qquad p = \frac{1+r-d}{u-d}.$$

- Replicar la opción: invertir y acciones y depositar $x - ys$ en el banco:



  Resolver para $y = \dfrac{a-b}{(u-d)s}$.

- Considere una opción para el modelo binomial de precios accionarios de dos periodos:



- Pagos $x_{2,2}$, $x_{1,2}$, $x_{0,2}$ al final del segundo periodo $t = 2\Delta$, cuando los precios de las acciones alcanzan el valor u^2s, uds y d^2s, respectivamente.
- El valor de la opción $x_{1,1}$, $x_{0,1}$ en $t = \Delta$, cuando los precios de las acciones alcanzan el valor us y ds respectivamente.

$$x_{1,1} = (px_{2,2} + (1-p)x_{1,2})/(1+r)$$
$$x_{0,1} = (px_{1,2} + (1-p)x_{0,2})/(1+r)$$

  El valor de la opción x_0 en $t = 0$ es

$$x_{0,0} = (px_{1,1} + (1-p)x_{0,1})/(1+r) = (p^2x_{2,2} + 2p(1-p)x_{1,2} + (1-p)^2x_{0,2})/(1+r)^2$$

- Replicar la opción al mantener en posición $y_{0,0}$ acciones en $t = 0$ y mantener en posición $y_{1,1}$, $y_{0,1}$ acciones al tiempo $t = \Delta$, cuando los precios de las acciones alcancen el valor *us*, *ds*, respectivamente. El resto del dinero se deposita en el banco.
  Al tiempo 0, mantener $y_{0,0}$ acciones:

$$y_{0,0} = \frac{x_{1,1} - x_{0,1}}{(u-d)s}$$

  Al tiempo 1 y si el precio de las acciones aumenta, mantener $y_{1,1}$ acciones:

$$y_{1,1} = \frac{x_{2,2} - x_{1,2}}{(u-d)us}$$

  Al tiempo 1 y si el precio de las acciones bajan, mantener $y_{0,1}$ acciones:

$$y_{0,1} = \frac{x_{1,2} - x_{0,2}}{(u-d)ds}$$

  Esta inversión siempre tiene el mismo valor que la opción. El inversionista está libre de riesgo.
- Estrategia de arbitraje de cobertura delta:
  Invertir capital de $C(S,t,K,\sigma,r)$ en la opción y después comprar $(call)\ \dfrac{\partial C}{\partial S}$ acciones de cobertura, cuando su precio actual es S y queda un tiempo t antes de que la opción expire.
- $\dfrac{\partial C}{\partial S}$ se llama *delta.*

$$\frac{\partial C}{\partial S} = \Phi(\omega)$$

- $\dfrac{\partial C}{\partial r}$ se llama *rho*.

$$\frac{\partial C}{\partial r} = Kte^{-rt}\Phi(\omega - \sigma\sqrt{t})$$

- $\dfrac{\partial C}{\partial \sigma}$ se llama *vega*.

$$\frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{t}\Phi'(\omega)$$

- $\dfrac{\partial C}{\partial t}$ se llama *theta*.

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\sigma}{2\sqrt{t}} S\Phi'(\omega) + Kre^{-rt}\Phi\left(\omega - \sigma\sqrt{t}\right)$$

Parte B

TABLAS

1 LOGARITMOS COMUNES HASTA CUATRO DECIMALES

$\log_{10} N$ o $\log N$

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales 1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	0000	0043	0086	0128	0170	0212	0253	0294	0334	0374	4	8	12	17	21	25	29	33	37
11	0414	0453	0492	0531	0569	0607	0645	0682	0719	0755	4	8	11	15	19	23	26	30	34
12	0792	0828	0864	0899	0934	0969	1004	1038	1072	1106	3	7	10	14	17	21	24	28	31
13	1139	1173	1206	1239	1271	1303	1335	1367	1399	1430	3	6	10	13	16	19	23	26	29
14	1461	1492	1523	1553	1584	1614	1644	1673	1703	1732	3	6	9	12	15	18	21	24	27
15	1761	1790	1818	1847	1875	1903	1931	1959	1987	2014	3	6	8	11	14	17	20	22	25
16	2041	2068	2095	2122	2148	2175	2201	2227	2253	2279	3	5	8	11	13	16	18	21	24
17	2304	2330	2355	2380	2405	2430	2455	2480	2504	2529	2	5	7	10	12	15	17	20	22
18	2553	2577	2601	2625	2648	2672	2695	2718	2742	2765	2	5	7	9	12	14	16	19	21
19	2788	2810	2833	2856	2878	2900	2923	2945	2967	2989	2	4	7	9	11	13	16	18	20
20	3010	3032	3054	3075	3096	3118	3139	3160	3181	3201	2	4	6	8	11	13	15	17	19
21	3222	3243	3263	3284	3304	3324	3345	3365	3385	3404	2	4	6	8	10	12	14	16	18
22	3424	3444	3464	3483	3502	3522	3541	3560	3579	3598	2	4	6	8	10	12	14	15	17
23	3617	3636	3655	3674	3692	3711	3729	3747	3766	3784	2	4	6	7	9	11	13	15	17
24	3802	3820	3838	3856	3874	3892	3909	3927	3945	3962	2	4	5	7	9	11	12	14	16
25	3979	3997	4014	4031	4048	4065	4082	4099	4116	4133	2	3	5	7	9	10	12	14	15
26	4150	4166	4183	4200	4216	4232	4249	4265	4281	4298	2	3	5	7	8	10	11	13	15
27	4314	4330	4346	4362	4378	4393	4409	4425	4440	4456	2	3	5	6	8	9	11	13	14
28	4472	4487	4502	4518	4533	4548	4564	4579	4594	4609	2	3	5	6	8	9	11	12	14
29	4624	4639	4654	4669	4683	4698	4713	4728	4742	4757	1	3	4	6	7	9	10	12	13
30	4771	4786	4800	4814	4829	4843	4857	4871	4886	4900	1	3	4	6	7	9	10	11	13
31	4914	4928	4942	4955	4969	4983	4997	5011	5024	5038	1	3	4	6	7	8	10	11	12
32	5051	5065	5079	5092	5105	5119	5132	5145	5159	5172	1	3	4	5	7	8	9	11	12
33	5185	5198	5211	5224	5237	5250	5263	5276	5289	5302	1	3	4	5	6	8	9	10	12
34	5315	5328	5340	5353	5366	5378	5391	5403	5416	5428	1	3	4	5	6	8	9	10	11
35	5441	5453	5465	5478	5490	5502	5514	5527	5539	5551	1	2	4	5	6	7	9	10	11
36	5563	5575	5587	5599	5611	5623	5635	5647	5658	5670	1	2	4	5	6	7	8	10	11
37	5682	5694	5705	5717	5729	5740	5752	5763	5775	5786	1	2	3	5	6	7	8	9	10
38	5798	5809	5821	5832	5843	5855	5866	5877	5888	5899	1	2	3	5	6	7	8	9	10
39	5911	5922	5933	5944	5955	5966	5977	5988	5999	6010	1	2	3	4	5	7	8	9	10
40	6021	6031	6042	6053	6064	6075	6085	6096	6107	6117	1	2	3	4	5	6	8	9	10
41	6128	6138	6149	6160	6170	6180	6191	6201	6212	6222	1	2	3	4	5	6	7	8	9
42	6232	6243	6253	6263	6274	6284	6294	6304	6314	6325	1	2	3	4	5	6	7	8	9
43	6335	6345	6355	6365	6375	6385	6395	6405	6415	6425	1	2	3	4	5	6	7	8	9
44	6435	6444	6454	6464	6474	6484	6493	6503	6513	6522	1	2	3	4	5	6	7	8	9
45	6532	6542	6551	6561	6571	6580	6590	6599	6609	6618	1	2	3	4	5	6	7	8	9
46	6628	6637	6646	6656	6665	6675	6684	6693	6702	6712	1	2	3	4	5	6	7	7	8
47	6721	6730	6739	6749	6758	6767	6776	6785	6794	6803	1	2	3	4	5	5	6	7	8
48	6812	6821	6830	6839	6848	6857	6866	6875	6884	6893	1	2	3	4	4	5	6	7	8
49	6902	6911	6920	6928	6937	6946	6955	6964	6972	6981	1	2	3	4	4	5	6	7	8
50	6990	6998	7007	7016	7024	7033	7042	7050	7059	7067	1	2	3	3	4	5	6	7	8
51	7076	7084	7093	7101	7110	7118	7126	7135	7143	7152	1	2	3	3	4	5	6	7	8
52	7160	7168	7177	7185	7193	7202	7210	7218	7226	7235	1	2	2	3	4	5	6	7	7
53	7243	7251	7259	7267	7275	7284	7292	7300	7308	7316	1	2	2	3	4	5	6	6	7
54	7324	7332	7340	7348	7356	7364	7372	7380	7388	7396	1	2	2	3	4	5	6	6	7
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

1 LOGARITMOS COMUNES HASTA CUATRO DECIMALES

$\log_{10} N$ o $\log N$ (*continuación*)

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Partes proporcionales 1	2	3	4	5	6	7	8	9
55	7404	7412	7419	7427	7435	7443	7451	7459	7466	7474	1	2	2	3	4	5	5	6	7
56	7482	7490	7497	7505	7513	7520	7528	7536	7543	7551	1	2	2	3	4	5	5	6	7
57	7559	7566	7574	7582	7589	7597	7604	7612	7619	7627	1	2	2	3	4	5	5	6	7
58	7634	7642	7649	7657	7664	7672	7679	7686	7694	7701	1	1	2	3	4	4	5	6	7
59	7709	7716	7723	7731	7738	7745	7752	7760	7767	7774	1	1	2	3	4	4	5	6	7
60	7782	7789	7796	7803	7810	7818	7825	7832	7839	7846	1	1	2	3	4	4	5	6	6
61	7853	7860	7868	7875	7882	7889	7896	7903	7910	7917	1	1	2	3	4	4	5	6	6
62	7924	7931	7938	7945	7952	7959	7966	7973	7980	7987	1	1	2	3	3	4	5	6	6
63	7993	8000	8007	8014	8021	8028	8035	8041	8048	8055	1	1	2	3	3	4	5	5	6
64	8062	8069	8075	8082	8089	8096	8102	8109	8116	8122	1	1	2	3	3	4	5	5	6
65	8129	8136	8142	8149	8156	8162	8169	8176	8182	8189	1	1	2	3	3	4	5	5	6
66	8195	8202	8209	8215	8222	8228	8235	8241	8248	8254	1	1	2	3	3	4	5	5	6
67	8261	8267	8274	8280	8287	8293	8299	8306	8312	8319	1	1	2	3	3	4	5	5	6
68	8325	8331	8338	8344	8351	8357	8363	8370	8376	8382	1	1	2	3	3	4	4	5	6
69	8388	8395	8401	8407	8414	8420	8426	8432	8439	8445	1	1	2	2	3	4	4	5	6
70	8451	8457	8463	8470	8476	8482	8488	8494	8500	8506	1	1	2	2	3	4	4	5	6
71	8513	8519	8525	8531	8537	8543	8549	8555	8561	8567	1	1	2	2	3	4	4	5	5
72	8573	8579	8585	8591	8597	8603	8609	8615	8621	8627	1	1	2	2	3	4	4	5	5
73	8633	8639	8645	8651	8657	8663	8669	8675	8681	8686	1	1	2	2	3	4	4	5	5
74	8692	8698	8704	8710	8716	8722	8727	8733	8739	8745	1	1	2	2	3	4	4	5	5
75	8751	8756	8762	8768	8774	8779	8785	8791	8797	8802	1	1	2	2	3	3	4	5	5
76	8808	8814	8820	8825	8831	8837	8842	8848	8854	8859	1	1	2	2	3	3	4	5	5
77	8865	8871	8876	8882	8887	8893	8899	8904	8910	8915	1	1	2	2	3	3	4	4	5
78	8921	8927	8932	8938	8943	8949	8954	8960	8965	8971	1	1	2	2	3	3	4	4	5
79	8976	8982	8987	8993	8998	9004	9009	9015	9020	9025	1	1	2	2	3	3	4	4	5
80	9031	9036	9042	9047	9053	9058	9063	9069	9074	9079	1	1	2	2	3	3	4	4	5
81	9085	9090	9096	9101	9106	9112	9117	9122	9128	9133	1	1	2	2	3	3	4	4	5
82	9138	9143	9149	9154	9159	9165	9170	9175	9180	9186	1	1	2	2	3	3	4	4	5
83	9191	9196	9201	9206	9212	9217	9222	9227	9232	9238	1	1	2	2	3	3	4	4	5
84	9243	9248	9253	9258	9263	9269	9274	9279	9284	9289	1	1	2	2	3	3	4	4	5
85	9294	9299	9304	9309	9315	9320	9325	9330	9335	9340	1	1	2	2	3	3	4	4	5
86	9345	9350	9355	9360	9365	9370	9375	9380	9385	9390	1	1	2	2	3	3	4	4	5
87	9395	9400	9405	9410	9415	9420	9425	9430	9435	9440	0	1	1	2	2	3	3	4	4
88	9445	9450	9455	9460	9465	9469	9474	9479	9484	9489	0	1	1	2	2	3	3	4	4
89	9494	9499	9504	9509	9513	9518	9523	9528	9533	9538	0	1	1	2	2	3	3	4	4
90	9542	9547	9552	9557	9562	9566	9571	9576	9581	9586	0	1	1	2	2	3	3	4	4
91	9590	9595	9600	9605	9609	9614	9619	9624	9628	9633	0	1	1	2	2	3	3	4	4
92	9638	9643	9647	9652	9657	9661	9666	9671	9675	9680	0	1	1	2	2	3	3	4	4
93	9685	9689	9694	9699	9703	9708	9713	9717	9722	9727	0	1	1	2	2	3	3	4	4
94	9731	9736	9741	9745	9750	9754	9759	9763	9768	9773	0	1	1	2	2	3	3	4	4
95	9777	9782	9786	9791	9795	9800	9805	9809	9814	9818	0	1	1	2	2	3	3	4	4
96	9823	9827	9832	9836	9841	9845	9850	9854	9859	9863	0	1	1	2	2	3	3	4	4
97	9868	9872	9877	9881	9886	9890	9894	9899	9903	9908	0	1	1	2	2	3	3	4	4
98	9912	9917	9921	9926	9930	9934	9939	9943	9948	9952	0	1	1	2	2	3	3	4	4
99	9956	9961	9965	9969	9974	9978	9983	9987	9991	9996	0	1	1	2	2	3	3	3	4
N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	1	2	3	4	5	6	7	8	9

2 Sen x

(x en grados y minutos)

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	.0000	.0029	.0058	.0087	.0116	.0145
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320
2	.0349	.0378	.0407	.0436	.0465	.0494
3	.0523	.0552	.0581	.0610	.0640	.0669
4	.0698	.0727	.0756	.0785	.0814	.0843
5°	.0872	.0901	.0929	.0958	.0987	.1016
6	.1045	.1074	.1103	.1132	.1161	.1190
7	.1219	.1248	.1276	.1305	.1334	.1363
8	.1392	.1421	.1449	.1478	.1507	.1536
9	.1564	.1593	.1622	.1650	.1679	.1708
10°	.1736	.1765	.1794	.1822	.1851	.1880
11	.1908	.1937	.1965	.1994	.2022	.2051
12	.2079	.2108	.2136	.2164	.2193	.2221
13	.2250	.2278	.2306	.2334	.2363	.2391
14	.2419	.2447	.2476	.2504	.2532	.2560
15°	.2588	.2616	.2644	.2672	.2700	.2728
16	.2756	.2784	.2812	.2840	.2868	.2896
17	.2924	.2952	.2979	.3007	.3035	.3062
18	.3090	.3118	.3145	.3173	.3201	.3228
19	.3256	.3283	.3311	.3338	.3365	.3393
20°	.3420	.3448	.3475	.3502	.3529	.3557
21	.3584	.3611	.3638	.3665	.3692	.3719
22	.3746	.3773	.3800	.3827	.3854	.3881
23	.3907	.3934	.3961	.3987	.4014	.4041
24	.4067	.4094	.4120	.4147	.4173	.4200
25°	.4226	.4253	.4279	.4305	.4331	.4358
26	.4384	.4410	.4436	.4462	.4488	.4514
27	.4540	.4566	.4592	.4617	.4643	.4669
28	.4695	.4720	.4746	.4772	.4797	.4823
29	.4848	.4874	.4899	.4924	.4950	.4975
30°	.5000	.5025	.5050	.5075	.5100	.5125
31	.5150	.5175	.5200	.5225	.5250	.5275
32	.5299	.5324	.5348	.5373	.5398	.5422
33	.5446	.5471	.5495	.5519	.5544	.5568
34	.5592	.5616	.5640	.5664	.5688	.5712
35°	.5736	.5760	.5783	.5807	.5831	.5854
36	.5878	.5901	.5925	.5948	.5972	.5995
37	.6018	.6041	.6065	.6088	.6111	.6134
38	.6157	.6180	.6202	.6225	.6248	.6271
39	.6293	.6316	.6338	.6361	.6383	.6406
40°	.6428	.6450	.6472	.6494	.6517	.6539
41	.6561	.6583	.6604	.6626	.6648	.6670
42	.6691	.6713	.6734	.6756	.6777	.6799
43	.6820	.6841	.6862	.6884	.6905	.6926
44	.6947	.6967	.6988	.7009	.7030	.7050
45°	.7071	.7092	.7112	.7133	.7153	.7173

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	.7071	.7092	.7112	.7133	.7153	.7173
46	.7193	.7214	.7234	.7254	.7274	.7294
47	.7314	.7333	.7353	.7373	.7392	.7412
48	.7431	.7451	.7470	.7490	.7509	.7528
49	.7547	.7566	.7585	.7604	.7623	.7642
50°	.7660	.7679	.7698	.7716	.7735	.7753
51	.7771	.7790	.7808	.7826	.7844	.7862
52	.7880	.7898	.7916	.7934	.7951	.7969
53	.7986	.8004	.8021	.8039	.8056	.8073
54	.8090	.8107	.8124	.8141	.8158	.8175
55°	.8192	.8208	.8225	.8241	.8258	.8274
56	.8290	.8307	.8323	.8339	.8355	.8371
57	.8387	.8403	.8418	.8434	.8450	.8465
58	.8480	.8496	.8511	.8526	.8542	.8557
59	.8572	.8587	.8601	.8616	.8631	.8646
60°	.8660	.8675	.8689	.8704	.8718	.8732
61	.8746	.8760	.8774	.8788	.8802	.8816
62	.8829	.8843	.8857	.8870	.8884	.8897
63	.8910	.8923	.8936	.8949	.8962	.8975
64	.8988	.9001	.9013	.9026	.9038	.9051
65°	.9063	.9075	.9088	.9100	.9112	.9124
66	.9135	.9147	.9159	.9171	.9182	.9194
67	.9205	.9216	.9228	.9239	.9250	.9261
68	.9272	.9283	.9293	.9304	.9315	.9325
69	.9336	.9346	.9356	.9367	.9377	.9387
70°	.9397	.9407	.9417	.9426	.9436	.9446
71	.9455	.9465	.9474	.9483	.9492	.9502
72	.9511	.9520	.9528	.9537	.9546	.9555
73	.9563	.9572	.9580	.9588	.9596	.9605
74	.9613	.9621	.9628	.9636	.9644	.9652
75°	.9659	.9667	.9674	.9681	.9689	.9696
76	.9703	.9710	.9717	.9724	.9730	.9737
77	.9744	.9750	.9757	.9763	.9769	.9775
78	.9781	.9787	.9793	.9799	.9805	.9811
79	.9816	.9822	.9827	.9833	.9838	.9843
80°	.9848	.9853	.9858	.9863	.9868	.9872
81	.9877	.9881	.9886	.9890	.9894	.9899
82	.9903	.9907	.9911	.9914	.9918	.9922
83	.9925	.9929	.9932	.9936	.9939	.9942
84	.9945	.9948	.9951	.9954	.9957	.9959
85°	.9962	.9964	.9967	.9969	.9971	.9974
86	.9976	.9978	.9980	.9981	.9983	.9985
87	.9986	.9988	.9989	.9990	.9992	.9993
88	.9994	.9995	.9996	.9997	.9997	.9998
89	.9998	.9999	.9999	1.0000	1.0000	1.0000
90°	1.0000					

3

Cos x

(x en grados y minutos)

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9999
1	.9998	.9998	.9997	.9997	.9996	.9995
2	.9994	.9993	.9992	.9990	.9989	.9988
3	.9986	.9985	.9983	.9981	.9980	.9978
4	.9976	.9974	.9971	.9969	.9967	.9964
5°	.9962	.9959	.9957	.9954	.9951	.9948
6	.9945	.9942	.9939	.9936	.9932	.9929
7	.9925	.9922	.9918	.9914	.9911	.9907
8	.9903	.9899	.9894	.9890	.9886	.9881
9	.9877	.9872	.9868	.9863	.9858	.9853
10°	.9848	.9843	.9838	.9833	.9827	.9822
11	.9816	.9811	.9805	.9799	.9793	.9787
12	.9781	.9775	.9769	.9763	.9757	.9750
13	.9744	.9737	.9730	.9724	.9717	.9710
14	.9703	.9696	.9689	.9681	.9674	.9667
15°	.9659	.9652	.9644	.9636	.9628	.9621
16	.9613	.9605	.9596	.9588	.9580	.9572
17	.9563	.9555	.9546	.9537	.9528	.9520
18	.9511	.9502	.9492	.9483	.9474	.9465
19	.9455	.9446	.9436	.9426	.9417	.9407
20°	.9397	.9387	.9377	.9367	.9356	.9346
21	.9336	.9325	.9315	.9304	.9293	.9283
22	.9272	.9261	.9250	.9239	.9228	.9216
23	.9205	.9194	.9182	.9171	.9159	.9147
24	.9135	.9124	.9112	.9100	.9088	.9075
25°	.9063	.9051	.9038	.9026	.9013	.9001
26	.8988	.8975	.8962	.8949	.8936	.8923
27	.8910	.8897	.8884	.8870	.8857	.8843
28	.8829	.8816	.8802	.8788	.8774	.8760
29	.8746	.8732	.8718	.8704	.8689	.8675
30°	.8660	.8646	.8631	.8616	.8601	.8587
31	.8572	.8557	.8542	.8526	.8511	.8496
32	.8480	.8465	.8450	.8434	.8418	.8403
33	.8387	.8371	.8355	.8339	.8323	.8307
34	.8290	.8274	.8258	.8241	.8225	.8208
35°	.8192	.8175	.8158	.8141	.8124	.8107
36	.8090	.8073	.8056	.8039	.8021	.8004
37	.7986	.7969	.7951	.7934	.7916	.7898
38	.7880	.7862	.7844	.7826	.7808	.7790
39	.7771	.7753	.7735	.7716	.7698	.7679
40°	.7660	.7642	.7623	.7604	.7585	.7566
41	.7547	.7528	.7509	.7490	.7470	.7451
42	.7431	.7412	.7392	.7373	.7353	.7333
43	.7314	.7294	.7274	.7254	.7234	.7214
44	.7193	.7173	.7153	.7133	.7112	.7092
45°	.7071	.7050	.7030	.7009	.6988	.6967

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	.7071	.7050	.7030	.7009	.6988	.6967
46	.6947	.6926	.6905	.6884	.6862	.6841
47	.6820	.6799	.6777	.6756	.6734	.6713
48	.6691	.6670	.6648	.6626	.6604	.6583
49	.6561	.6539	.6517	.6494	.6472	.6450
50°	.6428	.6406	.6383	.6361	.6338	.6316
51	.6293	.6271	.6248	.6225	.6202	.6180
52	.6157	.6134	.6111	.6088	.6065	.6041
53	.6018	.5995	.5972	.5948	.5925	.5901
54	.5878	.5854	.5831	.5807	.5783	.5760
55°	.5736	.5712	.5688	.5664	.5640	.5616
56	.5592	.5568	.5544	.5519	.5495	.5471
57	.5446	.5422	.5398	.5373	.5348	.5324
58	.5299	.5275	.5250	.5225	.5200	.5175
59	.5150	.5125	.5100	.5075	.5050	.5025
60°	.5000	.4975	.4950	.4924	.4899	.4874
61	.4848	.4823	.4797	.4772	.4746	.4720
62	.4695	.4669	.4643	.4617	.4592	.4566
63	.4540	.4514	.4488	.4462	.4436	.4410
64	.4384	.4358	.4331	.4305	.4279	.4253
65°	.4226	.4200	.4173	.4147	.4120	.4094
66	.4067	.4041	.4014	.3987	.3961	.3934
67	.3907	.3881	.3854	.3827	.3800	.3773
68	.3746	.3719	.3692	.3665	.3638	.3611
69	.3584	.3557	.3529	.3502	.3475	.3448
70°	.3420	.3393	.3365	.3338	.3311	.3283
71	.3256	.3228	.3201	.3173	.3145	.3118
72	.3090	.3062	.3035	.3007	.2979	.2952
73	.2924	.2896	.2868	.2840	.2812	.2784
74	.2756	.2728	.2700	.2672	.2644	.2616
75°	.2588	.2560	.2532	.2504	.2476	.2447
76	.2419	.2391	.2363	.2334	.2306	.2278
77	.2250	.2221	.2193	.2164	.2136	.2108
78	.2079	.2051	.2022	.1994	.1965	.1937
79	.1908	.1880	.1851	.1822	.1794	.1765
80°	.1736	.1708	.1679	.1650	.1622	.1593
81	.1564	.1536	.1507	.1478	.1449	.1421
82	.1392	.1363	.1334	.1305	.1276	.1248
83	.1219	.1190	.1161	.1132	.1103	.1074
84	.1045	.1016	.0987	.0958	.0929	.0901
85°	.0872	.0843	.0814	.0785	.0756	.0727
86	.0698	.0669	.0640	.0610	.0581	.0552
87	.0523	.0494	.0465	.0436	.0407	.0378
88	.0349	.0320	.0291	.0262	.0233	.0204
89	.0175	.0145	.0116	.0087	.0058	.0029
90°	.0000					

4 Tan x

(x en grados y minutos)

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
0°	.0000	.0029	.0058	.0087	.0116	.0145
1	.0175	.0204	.0233	.0262	.0291	.0320
2	.0349	.0378	.0407	.0437	.0466	.0495
3	.0524	.0553	.0582	.0612	.0641	.0670
4	.0699	.0729	.0758	.0787	.0816	.0846
5°	.0875	.0904	.0934	.0963	.0992	.1022
6	.1051	.1080	.1110	.1139	.1169	.1198
7	.1228	.1257	.1287	.1317	.1346	.1376
8	.1405	.1435	.1465	.1495	.1524	.1554
9	.1584	.1614	.1644	.1673	.1703	.1733
10°	.1763	.1793	.1823	.1853	.1883	.1914
11	.1944	.1974	.2004	.2035	.2065	.2095
12	.2126	.2156	.2186	.2217	.2247	.2278
13	.2309	.2339	.2370	.2401	.2432	.2462
14	.2493	.2524	.2555	.2586	.2617	.2648
15°	.2679	.2711	.2742	.2773	.2805	.2836
16	.2867	.2899	.2931	.2962	.2994	.3026
17	.3057	.3089	.3121	.3153	.3185	.3217
18	.3249	.3281	.3314	.3346	.3378	.3411
19	.3443	.3476	.3508	.3541	.3574	.3607
20°	.3640	.3673	.3706	.3739	.3772	.3805
21	.3839	.3872	.3906	.3939	.3973	.4006
22	.4040	.4074	.4108	.4142	.4176	.4210
23	.4245	.4279	.4314	.4348	.4383	.4417
24	.4452	.4487	.4522	.4557	.4592	.4628
25°	.4663	.4699	.4734	.4770	.4806	.4841
26	.4877	.4913	.4950	.4986	.5022	.5059
27	.5095	.5132	.5169	.5206	.5243	.5280
28	.5317	.5354	.5392	.5430	.5467	.5505
29	.5543	.5581	.5619	.5658	.5696	.5735
30°	.5774	.5812	.5851	.5890	.5930	.5969
31	.6009	.6048	.6088	.6128	.6168	.6208
32	.6249	.6289	.6330	.6371	.6412	.6453
33	.6494	.6536	.6577	.6619	.6661	.6703
34	.6745	.6787	.6830	.6873	.6916	.6959
35°	.7002	.7046	.7089	.7133	.7177	.7221
36	.7265	.7310	.7355	.7400	.7445	.7490
37	.7536	.7581	.7627	.7673	.7720	.7766
38	.7813	.7860	.7907	.7954	.8002	.8050
39	.8098	.8146	.8195	.8243	.8292	.8342
40°	.8391	.8441	.8491	.8541	.8591	.8642
41	.8693	.8744	.8796	.8847	.8899	.8952
42	.9004	.9057	.9110	.9163	.9217	.9271
43	.9325	.9380	.9435	.9490	.9545	.9601
44	.9657	.9713	.9770	.9827	.9884	.9942
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295

x	0′	10′	20′	30′	40′	50′
45°	1.0000	1.0058	1.0117	1.0176	1.0235	1.0295
46	1.0355	1.0416	1.0477	1.0538	1.0599	1.0661
47	1.0724	1.0786	1.0850	1.0913	1.0977	1.1041
48	1.1106	1.1171	1.1237	1.1303	1.1369	1.1436
49	1.1504	1.1571	1.1640	1.1708	1.1778	1.1847
50°	1.1918	1.1988	1.2059	1.2131	1.2203	1.2276
51	1.2349	1.2423	1.2497	1.2572	1.2647	1.2723
52	1.2799	1.2876	1.2954	1.3032	1.3111	1.3190
53	1.3270	1.3351	1.3432	1.3514	1.3597	1.3680
54	1.3764	1.3848	1.3934	1.4019	1.4106	1.4193
55°	1.4281	1.4370	1.4460	1.4550	1.4641	1.4733
56	1.4826	1.4919	1.5013	1.5108	1.5204	1.5301
57	1.5399	1.5497	1.5597	1.5697	1.5798	1.5900
58	1.6003	1.6107	1.6212	1.6319	1.6426	1.6534
59	1.6643	1.6753	1.6864	1.6977	1.7090	1.7205
60°	1.7321	1.7437	1.7556	1.7675	1.7796	1.7917
61	1.8040	1.8165	1.8291	1.8418	1.8546	1.8676
62	1.8807	1.8940	1.9074	1.9210	1.9347	1.9486
63	1.9626	1.9768	1.9912	2.0057	2.0204	2.0353
64	2.0503	2.0655	2.0809	2.0965	2.1123	2.1283
65°	2.1445	2.1609	2.1775	2.1943	2.2113	2.2286
66	2.2460	2.2637	2.2817	2.2998	2.3183	2.3369
67	2.3559	2.3750	2.3945	2.4142	2.4342	2.4545
68	2.4751	2.4960	2.5172	2.5386	2.5605	2.5826
69	2.6051	2.6279	2.6511	2.6746	2.6985	2.7228
70°	2.7475	2.7725	2.7980	2.8239	2.8502	2.8770
71	2.9042	2.9319	2.9600	2.9887	3.0178	3.0475
72	3.0777	3.1084	3.1397	3.1716	3.2041	3.2371
73	3.2709	3.3052	3.3402	3.3759	3.4124	3.4495
74	3.4874	3.5261	3.5656	3.6059	3.6470	3.6891
75°	3.7321	3.7760	3.8208	3.8667	3.9136	3.9617
76	4.0108	4.0611	4.1126	4.1653	4.2193	4.2747
77	4.3315	4.3897	4.4494	4.5107	4.5736	4.6382
78	4.7046	4.7729	4.8430	4.9152	4.9894	5.0658
79	5.1446	5.2257	5.3093	5.3955	5.4845	5.5764
80°	5.6713	5.7694	5.8708	5.9758	6.0844	6.1970
81	6.3138	6.4348	6.5606	6.6912	6.8269	6.9682
82	7.1154	7.2687	7.4287	7.5958	7.7704	7.9530
83	8.1443	8.3450	8.5555	8.7769	9.0098	9.2553
84	9.5144	9.7882	10.078	10.385	10.712	11.059
85°	11.430	11.826	12.251	12.706	13.197	13.727
86	14.301	14.924	15.605	16.350	17.169	18.075
87	19.081	20.206	21.470	22.904	24.542	26.432
88	28.636	31.242	34.368	38.188	42.964	49.104
89	57.290	68.750	85.940	114.59	171.89	343.77
90°	∞					

5 CONVERSIÓN DE RADIANES A GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS O FRACCIONES DE GRADOS

Radianes	Grados	Min.	Seg.	Fracciones de grados
1	57°	17′	44.8″	57.2958°
2	114°	35′	29.6″	114.5916°
3	171°	53′	14.4″	171.8873°
4	229°	10′	59.2″	229.1831°
5	286°	28′	44.0″	286.4789°
6	343°	46′	28.8″	343.7747°
7	401°	4′	13.6″	401.0705°
8	458°	21′	58.4″	458.3662°
9	515°	39′	43.3″	515.6620°
10	572°	57′	28.1″	572.9578°
.1	5°	43′	46.5″	
.2	11°	27′	33.0″	
.3	17°	11′	19.4″	
.4	22°	55′	5.9″	
.5	28°	38′	52.4″	
.6	34°	22′	38.9″	
.7	40°	6′	25.4″	
.8	45°	50′	11.8″	
.9	51°	33′	58.3″	
.01	0°	34′	22.6″	
.02	1°	8′	45.3″	
.03	1°	43′	7.9″	
.04	2°	17′	30.6″	
.05	2°	51′	53.2″	
.06	3°	26′	15.9″	
.07	4°	0′	38.5″	
.08	4°	35′	1.2″	
.09	5°	9′	23.8″	
.001	0°	3′	26.3″	
.002	0°	6′	52.5″	
.003	0°	10′	18.8″	
.004	0°	13′	45.1″	
.005	0°	17′	11.3″	
.006	0°	20′	37.6″	
.007	0°	24′	3.9″	
.008	0°	27′	30.1″	
.009	0°	30′	56.4″	
.0001	0°	0′	20.6″	
.0002	0°	0′	41.3″	
.0003	0°	1′	1.9″	
.0004	0°	1′	22.5″	
.0005	0°	1′	43.1″	
.0006	0°	2′	3.8″	
.0007	0°	2′	24.4″	
.0008	0°	2′	45.0″	
.0009	0°	3′	5.6″	

6 CONVERSIÓN DE GRADOS, MINUTOS Y SEGUNDOS A RADIANES

Grados	Radianes
1°	.0174533
2°	.0349066
3°	.0523599
4°	.0698132
5°	.0872665
6°	.1047198
7°	.1221730
8°	.1396263
9°	.1570796
10°	.1745329

Minutos	Radianes
1′	.00029089
2′	.00058178
3′	.00087266
4′	.00116355
5′	.00145444
6′	.00174533
7′	.00203622
8′	.00232711
9′	.00261800
10′	.00290888

Segundos	Radianes
1″	.0000048481
2″	.0000096963
3″	.0000145444
4″	.0000193925
5″	.0000242407
6″	.0000290888
7″	.0000339370
8″	.0000387851
9″	.0000436332
10″	.0000484814

7 LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS

$\log_e x$ o $\ln x$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.0	.00000	.00995	.01980	.02956	.03922	.04879	.05827	.06766	.07696	.08618
1.1	.09531	.10436	.11333	.12222	.13103	.13976	.14842	.15700	.16551	.17395
1.2	.18232	.19062	.19885	.20701	.21511	.22314	.23111	.23902	.24686	.25464
1.3	.26236	.27003	.27763	.28518	.29267	.30010	.30748	.31481	.32208	.32930
1.4	.33647	.34359	.35066	.35767	.36464	.37156	.37844	.38526	.39204	.39878
1.5	.40547	.41211	.41871	.42527	.43178	.43825	.44469	.45108	.45742	.46373
1.6	.47000	.47623	.48243	.48858	.49470	.50078	.50682	.51282	.51879	.52473
1.7	.53063	.53649	.54232	.54812	.55389	.55962	.56531	.57098	.57661	.58222
1.8	.58779	.59333	.59884	.60432	.60977	.61519	.62058	.62594	.63127	.63658
1.9	.64185	.64710	.65233	.65752	.66269	.66783	.67294	.67803	.68310	.68813
2.0	.69315	.69813	.70310	.70804	.71295	.71784	.72271	.72755	.73237	.73716
2.1	.74194	.74669	.75142	.75612	.76081	.76547	.77011	.77473	.77932	.78390
2.2	.78846	.79299	.79751	.80200	.80648	.81093	.81536	.81978	.82418	.82855
2.3	.83291	.83725	.84157	.84587	.85015	.85442	.85866	.86289	.86710	.87129
2.4	.87547	.87963	.88377	.88789	.89200	.89609	.90016	.90422	.90826	.91228
2.5	.91629	.92028	.92426	.92822	.93216	.93609	.94001	.94391	.94779	.95166
2.6	.95551	.95935	.96317	.96698	.97078	.97456	.97833	.98208	.98582	.98954
2.7	.99325	.99695	1.00063	1.00430	1.00796	1.01160	1.01523	1.01885	1.02245	1.02604
2.8	1.02962	1.03318	1.03674	1.04028	1.04380	1.04732	1.05082	1.05431	1.05779	1.06126
2.9	1.06471	1.06815	1.07158	1.07500	1.07841	1.08181	1.08519	1.08856	1.09192	1.09527
3.0	1.09861	1.10194	1.10526	1.10856	1.11186	1.11514	1.11841	1.12168	1.12493	1.12817
3.1	1.13140	1.13462	1.13783	1.14103	1.14422	1.14740	1.15057	1.15373	1.15688	1.16002
3.2	1.16315	1.16627	1.16938	1.17248	1.17557	1.17865	1.18173	1.18479	1.18784	1.19089
3.3	1.19392	1.19695	1.19996	1.20297	1.20597	1.20896	1.21194	1.21491	1.21788	1.22083
3.4	1.22378	1.22671	1.22964	1.23256	1.23547	1.23837	1.24127	1.24415	1.24703	1.24990
3.5	1.25276	1.25562	1.25846	1.26130	1.26413	1.26695	1.26976	1.27257	1.27536	1.27815
3.6	1.28093	1.28371	1.28647	1.28923	1.29198	1.29473	1.29746	1.30019	1.30291	1.30563
3.7	1.30833	1.31103	1.31372	1.31641	1.31909	1.32176	1.32442	1.32708	1.32972	1.33237
3.8	1.33500	1.33763	1.34025	1.34286	1.34547	1.34807	1.35067	1.35325	1.35584	1.35841
3.9	1.36098	1.36354	1.36609	1.36864	1.37118	1.37372	1.37624	1.37877	1.38128	1.38379
4.0	1.38629	1.38879	1.39128	1.39377	1.39624	1.39872	1.40118	1.40364	1.40610	1.40854
4.1	1.41099	1.41342	1.41585	1.41828	1.42070	1.42311	1.42552	1.42792	1.43031	1.43270
4.2	1.43508	1.43746	1.43984	1.44220	1.44456	1.44692	1.44927	1.45161	1.45395	1.45629
4.3	1.45862	1.46094	1.46326	1.46557	1.46787	1.47018	1.47247	1.47476	1.47705	1.47933
4.4	1.48160	1.48387	1.48614	1.48840	1.49065	1.49290	1.49515	1.49739	1.49962	1.50185
4.5	1.50408	1.50630	1.50851	1.51072	1.51293	1.51513	1.51732	1.51951	1.52170	1.52388
4.6	1.52606	1.52823	1.53039	1.53256	1.53471	1.53687	1.53902	1.54116	1.54330	1.54543
4.7	1.54756	1.54969	1.55181	1.55393	1.55604	1.55814	1.56025	1.56235	1.56444	1.56653
4.8	1.56862	1.57070	1.57277	1.57485	1.57691	1.57898	1.58104	1.58309	1.58515	1.58719
4.9	1.58924	1.59127	1.59331	1.59534	1.59737	1.59939	1.60141	1.60342	1.60543	1.60744

$\ln 10 = 2.30259$
$2 \ln 10 = 4.60517$
$3 \ln 10 = 6.90776$
$4 \ln 10 = 9.21034$
$5 \ln 10 = 11.51293$
$6 \ln 10 = 13.81551$
$7 \ln 10 = 16.11810$
$8 \ln 10 = 18.42068$
$9 \ln 10 = 20.72327$

7 LOGARITMOS NATURALES O NEPERIANOS

$\log_e x$ o ln x (*continuación*)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.0	1.60944	1.61144	1.61343	1.61542	1.61741	1.61939	1.62137	1.62334	1.62531	1.62728
5.1	1.62924	1.63120	1.63315	1.63511	1.63705	1.63900	1.64094	1.64287	1.64481	1.64673
5.2	1.64866	1.65058	1.65250	1.65441	1.65632	1.65823	1.66013	1.66203	1.66393	1.66582
5.3	1.66771	1.66959	1.67147	1.67335	1.67523	1.67710	1.67896	1.68083	1.68269	1.68455
5.4	1.68640	1.68825	1.69010	1.69194	1.69378	1.69562	1.69745	1.69928	1.70111	1.70293
5.5	1.70475	1.70656	1.70838	1.71019	1.71199	1.71380	1.71560	1.71740	1.71919	1.72098
5.6	1.72277	1.72455	1.72633	1.72811	1.72988	1.73166	1.73342	1.73519	1.73695	1.73871
5.7	1.74047	1.74222	1.74397	1.74572	1.74746	1.74920	1.75094	1.75267	1.75440	1.75613
5.8	1.75786	1.75958	1.76130	1.76302	1.76473	1.76644	1.76815	1.76985	1.77156	1.77326
5.9	1.77495	1.77665	1.77834	1.78002	1.78171	1.78339	1.78507	1.78675	1.78842	1.79009
6.0	1.79176	1.79342	1.79509	1.79675	1.79840	1.80006	1.80171	1.80336	1.80500	1.80665
6.1	1.80829	1.80993	1.81156	1.81319	1.81482	1.81645	1.81808	1.81970	1.82132	1.82294
6.2	1.82455	1.82616	1.82777	1.82938	1.83098	1.83258	1.83418	1.83578	1.83737	1.83896
6.3	1.84055	1.84214	1.84372	1.84530	1.84688	1.84845	1.85003	1.85160	1.85317	1.85473
6.4	1.85630	1.85786	1.85942	1.86097	1.86253	1.86408	1.86563	1.86718	1.86872	1.87026
6.5	1.87180	1.87334	1.87487	1.87641	1.87794	1.87947	1.88099	1.88251	1.88403	1.88555
6.6	1.88707	1.88858	1.89010	1.89160	1.89311	1.89462	1.89612	1.89762	1.89912	1.90061
6.7	1.90211	1.90360	1.90509	1.90658	1.90806	1.90954	1.91102	1.91250	1.91398	1.91545
6.8	1.91692	1.91839	1.91986	1.92132	1.92279	1.92425	1.92571	1.92716	1.92862	1.93007
6.9	1.93152	1.93297	1.93442	1.93586	1.93730	1.93874	1.94018	1.94162	1.94305	1.94448
7.0	1.94591	1.94734	1.94876	1.95019	1.95161	1.95303	1.95445	1.95586	1.95727	1.95869
7.1	1.96009	1.96150	1.96291	1.96431	1.96571	1.96711	1.96851	1.96991	1.97130	1.97269
7.2	1.97408	1.97547	1.97685	1.97824	1.97962	1.98100	1.98238	1.98376	1.98513	1.98650
7.3	1.98787	1.98924	1.99061	1.99198	1.99334	1.99470	1.99606	1.99742	1.99877	2.00013
7.4	2.00148	2.00283	2.00418	2.00553	2.00687	2.00821	2.00956	2.01089	2.01223	2.01357
7.5	2.01490	2.01624	2.01757	2.01890	2.02022	2.02155	2.02287	2.02419	2.02551	2.02683
7.6	2.02815	2.02946	2.03078	2.03209	2.03340	2.03471	2.03601	2.03732	2.03862	2.03992
7.7	2.04122	2.04252	2.04381	2.04511	2.04640	2.04769	2.04898	2.05027	2.05156	2.05284
7.8	2.05412	2.05540	2.05668	2.05796	2.05924	2.06051	2.06179	2.06306	2.06433	2.06560
7.9	2.06686	2.06813	2.06939	2.07065	2.07191	2.07317	2.07443	2.07568	2.07694	2.07819
8.0	2.07944	2.08069	2.08194	2.08318	2.08443	2.08567	2.08691	2.08815	2.08939	2.09063
8.1	2.09186	2.09310	2.09433	2.09556	2.09679	2.09802	2.09924	2.10047	2.10169	2.10291
8.2	2.10413	2.10535	2.10657	2.10779	2.10900	2.11021	2.11142	2.11263	2.11384	2.11505
8.3	2.11626	2.11746	2.11366	2.11986	2.12106	2.12226	2.12346	2.12465	2.12585	2.12704
8.4	2.12823	2.12942	2.13061	2.13180	2.13298	2.13417	2.13535	2.13653	2.13771	2.13889
8.5	2.14007	2.14124	2.14242	2.14359	2.14476	2.14593	2.14710	2.14827	2.14943	2.15060
8.6	2.15176	2.15292	2.15409	2.15524	2.15640	2.15756	2.15871	2.15987	2.16102	2.16217
8.7	2.16332	2.16447	2.16562	2.16677	2.16791	2.16905	2.17020	2.17134	2.17248	2.17361
8.8	2.17475	2.17589	2.17702	2.17816	2.17929	2.18042	2.18155	2.18267	2.18380	2.18493
8.9	2.18605	2.18717	2.18830	2.18942	2.19054	2.19165	2.19277	2.19389	2.19500	2.19611
9.0	2.19722	2.19834	2.19944	2.20055	2.20166	2.20276	2.20387	2.20497	2.20607	2.20717
9.1	2.20827	2.20937	2.21047	2.21157	2.21266	2.21375	2.21485	2.21594	2.21703	2.21812
9.2	2.21920	2.22029	2.22138	2.22246	2.22354	2.22462	2.22570	2.22678	2.22786	2.22894
9.3	2.23001	2.23109	2.23216	2.23324	2.23431	2.23538	2.23645	2.23751	2.23858	2.23965
9.4	2.24071	2.24177	2.24284	2.24390	2.24496	2.24601	2.24707	2.24813	2.24918	2.25024
9.5	2.25129	2.25234	2.25339	2.25444	2.25549	2.25654	2.25759	2.25863	2.25968	2.26072
9.6	2.26176	2.26280	2.26384	2.26488	2.26592	2.26696	2.26799	2.26903	2.27006	2.27109
9.7	2.27213	2.27316	2.27419	2.27521	2.27624	2.27727	2.27829	2.27932	2.28034	2.28136
9.8	2.28238	2.28340	2.28442	2.28544	2.28646	2.28747	2.28849	2.28950	2.29051	2.29152
9.9	2.29253	2.29354	2.29455	2.29556	2.29657	2.29757	2.29858	2.29958	2.30058	2.30158

8 FUNCIONES EXPONENCIALES

e^x

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	1.0000	1.0101	1.0202	1.0305	1.0408	1.0513	1.0618	1.0725	1.0833	1.0942
.1	1.1052	1.1163	1.1275	1.1388	1.1503	1.1618	1.1735	1.1853	1.1972	1.2092
.2	1.2214	1.2337	1.2461	1.2586	1.2712	1.2840	1.2969	1.3100	1.3231	1.3364
.3	1.3499	1.3634	1.3771	1.3910	1.4049	1.4191	1.4333	1.4477	1.4623	1.4770
.4	1.4918	1.5068	1.5220	1.5373	1.5527	1.5683	1.5841	1.6000	1.6161	1.6323
.5	1.6487	1.6653	1.6820	1.6989	1.7160	1.7333	1.7507	1.7683	1.7860	1.8040
.6	1.8221	1.8404	1.8589	1.8776	1.8965	1.9155	1.9348	1.9542	1.9739	1.9937
.7	2.0138	2.0340	2.0544	2.0751	2.0959	2.1170	2.1383	2.1598	2.1815	2.2034
.8	2.2255	2.2479	2.2705	2.2933	2.3164	2.3396	2.3632	2.3869	2.4109	2.4351
.9	2.4596	2.4843	2.5093	2.5345	2.5600	2.5857	2.6117	2.6379	2.6645	2.6912
1.0	2.7183	2.7456	2.7732	2.8011	2.8292	2.8577	2.8864	2.9154	2.9447	2.9743
1.1	3.0042	3.0344	3.0649	3.0957	3.1268	3.1582	3.1899	3.2220	3.2544	3.2871
1.2	3.3201	3.3535	3.3872	3.4212	3.4556	3.4903	3.5254	3.5609	3.5966	3.6328
1.3	3.6693	3.7062	3.7434	3.7810	3.8190	3.8574	3.8962	3.9354	3.9749	4.0149
1.4	4.0552	4.0960	4.1371	4.1787	4.2207	4.2631	4.3060	4.3492	4.3929	4.4371
1.5	4.4817	4.5267	4.5722	4.6182	4.6646	4.7115	4.7588	4.8066	4.8550	4.9037
1.6	4.9530	5.0028	5.0531	5.1039	5.1552	5.2070	5.2593	5.3122	5.3656	5.4195
1.7	5.4739	5.5290	5.5845	5.6407	5.6973	5.7546	5.8124	5.8709	5.9299	5.9895
1.8	6.0496	6.1104	6.1719	6.2339	6.2965	6.3598	6.4237	6.4883	6.5535	6.6194
1.9	6.6859	6.7531	6.8210	6.8895	6.9588	7.0287	7.0993	7.1707	7.2427	7.3155
2.0	7.3891	7.4633	7.5383	7.6141	7.6906	7.7679	7.8460	7.9248	8.0045	8.0849
2.1	8.1662	8.2482	8.3311	8.4149	8.4994	8.5849	8.6711	8.7583	8.8463	8.9352
2.2	9.0250	9.1157	9.2073	9.2999	9.3933	9.4877	9.5831	9.6794	9.7767	9.8749
2.3	9.9742	10.074	10.176	10.278	10.381	10.486	10.591	10.697	10.805	10.913
2.4	11.023	11.134	11.246	11.359	11.473	11.588	11.705	11.822	11.941	12.061
2.5	12.182	12.305	12.429	12.554	12.680	12.807	12.936	13.066	13.197	13.330
2.6	13.464	13.599	13.736	13.874	14.013	14.154	14.296	14.440	14.585	14.732
2.7	14.880	15.029	15.180	15.333	15.487	15.643	15.800	15.959	16.119	16.281
2.8	16.445	16.610	16.777	16.945	17.116	17.288	17.462	17.637	17.814	17.993
2.9	18.174	18.357	18.541	18.728	18.916	19.106	19.298	19.492	19.688	19.886
3.0	20.086	20.287	20.491	20.697	20.905	21.115	21.328	21.542	21.758	21.977
3.1	22.198	22.421	22.646	22.874	23.104	23.336	23.571	23.807	24.047	24.288
3.2	24.533	24.779	25.028	25.280	25.534	25.790	26.050	26.311	26.576	26.843
3.3	27.113	27.385	27.660	27.938	28.219	28.503	28.789	29.079	29.371	29.666
3.4	29.964	30.265	30.569	30.877	31.187	31.500	31.817	32.137	32.460	32.786
3.5	33.115	33.448	33.784	34.124	34.467	34.813	35.163	35.517	35.874	36.234
3.6	36.598	36.966	37.338	37.713	38.092	38.475	38.861	39.252	39.646	40.045
3.7	40.447	40.854	41.264	41.679	42.098	42.521	42.948	43.380	43.816	44.256
3.8	44.701	45.150	45.604	46.063	46.525	46.993	47.465	47.942	48.424	48.911
3.9	49.402	49.899	50.400	50.907	51.419	51.935	52.457	52.985	53.517	54.055
4.	54.598	60.340	66.686	73.700	81.451	90.017	99.484	109.95	121.51	134.29
5.	148.41	164.02	181.27	200.34	221.41	244.69	270.43	298.87	330.30	365.04
6.	403.43	445.86	492.75	544.57	601.85	665.14	735.10	812.41	897.85	992.27
7.	1096.6	1212.0	1339.4	1480.3	1636.0	1808.0	1998.2	2208.3	2440.6	2697.3
8.	2981.0	3294.5	3641.0	4023.9	4447.1	4914.8	5431.7	6002.9	6634.2	7332.0
9.	8103.1	8955.3	9897.1	10938	12088	13360	14765	16318	18034	19930
10.	22026									

9 FUNCIONES EXPONENCIALES

e^{-x}

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
.0	1.00000	.99005	.98020	.97045	.96079	.95123	.94176	.93239	.92312	.91393
.1	.90484	.89583	.88692	.87810	.86936	.86071	.85214	.84366	.83527	.82696
.2	.81873	.81058	.80252	.79453	.78663	.77880	.77105	.76338	.75578	.74826
.3	.74082	.73345	.72615	.71892	.71177	.70469	.69768	.69073	.68386	.67706
.4	.67032	.66365	.65705	.65051	.64404	.63763	.63128	.62500	.61878	.61263
.5	.60653	.60050	.59452	.58860	.58275	.57695	.57121	.56553	.55990	.55433
.6	.54881	.54335	.53794	.53259	.52729	.52205	.51685	.51171	.50662	.50158
.7	.49659	.49164	.48675	.48191	.47711	.47237	.46767	.46301	.45841	.45384
.8	.44933	.44486	.44043	.43605	.43171	.42741	.42316	.41895	.41478	.41066
.9	.40657	.40252	.39852	.39455	.39063	.38674	.38289	.37908	.37531	.37158
1.0	.36788	.36422	.36060	.35701	.35345	.34994	.34646	.34301	.33960	.33622
1.1	.33287	.32956	.32628	.32303	.31982	.31664	.31349	.31037	.30728	.30422
1.2	.30119	.29820	.29523	.29229	.28938	.28650	.28365	.28083	.27804	.27527
1.3	.27253	.26982	.26714	.26448	.26185	.25924	.25666	.25411	.25158	.24908
1.4	.24660	.24414	.24171	.23931	.23693	.23457	.23224	.22993	.22764	.22537
1.5	.22313	.22091	.21871	.21654	.21438	.21225	.21014	.20805	.20598	.20393
1.6	.20190	.19989	.19790	.19593	.19398	.19205	.19014	.18825	.18637	.18452
1.7	.18268	.18087	.17907	.17728	.17552	.17377	.17204	.17033	.16864	.16696
1.8	.16530	.16365	.16203	.16041	.15882	.15724	.15567	.15412	.15259	.15107
1.9	.14957	.14808	.14661	.14515	.14370	.14227	.14086	.13946	.13807	.13670
2.0	.13534	.13399	.13266	.13134	.13003	.12873	.12745	.12619	.12493	.12369
2.1	.12246	.12124	.12003	.11884	.11765	.11648	.11533	.11418	.11304	.11192
2.2	.11080	.10970	.10861	.10753	.10646	.10540	.10435	.10331	.10228	.10127
2.3	.10026	.09926	.09827	.09730	.09633	.09537	.09442	.09348	.09255	.09163
2.4	.09072	.08982	.08892	.08804	.08716	.08629	.08543	.08458	.08374	.08291
2.5	.08208	.08127	.08046	.07966	.07887	.07808	.07730	.07654	.07577	.07502
2.6	.07427	.07353	.07280	.07208	.07136	.07065	.06995	.06925	.06856	.06788
2.7	.06721	.06654	.06587	.06522	.06457	.06393	.06329	.06266	.06204	.06142
2.8	.06081	.06020	.05961	.05901	.05843	.05784	.05727	.05670	.05613	.05558
2.9	.05502	.05448	.05393	.05340	.05287	.05234	.05182	.05130	.05079	.05029
3.0	.04979	.04929	.04880	.04832	.04783	.04736	.04689	.04642	.04596	.04550
3.1	.04505	.04460	.04416	.04372	.04328	.04285	.04243	.04200	.04159	.04117
3.2	.04076	.04036	.03996	.03956	.03916	.03877	.03839	.03801	.03763	.03725
3.3	.03688	.03652	.03615	.03579	.03544	.03508	.03474	.03439	.03405	.03371
3.4	.03337	.03304	.03271	.03239	.03206	.03175	.03143	.03112	.03081	.03050
3.5	.03020	.02990	.02960	.02930	.02901	.02872	.02844	.02816	.02788	.02760
3.6	.02732	.02705	.02678	.02652	.02625	.02599	.02573	.02548	.02522	.02497
3.7	.02472	.02448	.02423	.02399	.02375	.02352	.02328	.02305	.02282	.02260
3.8	.02237	.02215	.02193	.02171	.02149	.02128	.02107	.02086	.02065	.02045
3.9	.02024	.02004	.01984	.01964	.01945	.01925	.01906	.01887	.01869	.01850
4.	.018316	.016573	.014996	.013569	.012277	.011109	.010052	$.0^290953$	$.0^282297$	$.0^274466$
5.	$.0^267379$	$.0^260967$	$.0^255166$	$.0^249916$	$.0^245166$	$.0^240868$	$.0^236979$	$.0^233460$	$.0^230276$	$.0^227394$
6.	$.0^224788$	$.0^222429$	$.0^220294$	$.0^218363$	$.0^216616$	$.0^215034$	$.0^213604$	$.0^212309$	$.0^211138$	$.0^210078$
7.	$.0^391188$	$.0^382510$	$.0^374659$	$.0^367554$	$.0^361125$	$.0^355308$	$.0^350045$	$.0^345283$	$.0^340973$	$.0^337074$
8.	$.0^333546$	$.0^330354$	$.0^327465$	$.0^324852$	$.0^322487$	$.0^320347$	$.0^318411$	$.0^316659$	$.0^315073$	$.0^313639$
9.	$.0^312341$	$.0^311167$	$.0^310104$	$.0^491424$	$.0^482724$	$.0^474852$	$.0^467729$	$.0^461283$	$.0^455452$	$.0^450175$
10.	$.0^445400$									

10 INTEGRALES EXPONENCIALES, SENOIDALES Y COSENOIDALES

$$\mathrm{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du, \quad \mathrm{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} u}{u}\,du, \quad \mathrm{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,du$$

x	Ei(x)	Si(x)	Ci(x)
.0	∞	.0000	∞
.5	.5598	.4931	.1778
1.0	.2194	.9461	−.3374
1.5	.1000	1.3247	−.4704
2.0	.04890	1.6054	−.4230
2.5	.02491	1.7785	−.2859
3.0	.01305	1.8487	−.1196
3.5	$.0^2$6970	1.8331	.0321
4.0	$.0^2$3779	1.7582	.1410
4.5	$.0^2$2073	1.6541	.1935
5.0	$.0^2$1148	1.5499	.1900
5.5	$.0^3$6409	1.4687	.1421
6.0	$.0^3$3601	1.4247	.0681
6.5	$.0^3$2034	1.4218	−.0111
7.0	$.0^3$1155	1.4546	−.0767
7.5	$.0^4$6583	1.5107	−.1156
8.0	$.0^4$3767	1.5742	−.1224
8.5	$.0^4$2162	1.6296	−.09943
9.0	$.0^4$1245	1.6650	−.05535
9.5	$.0^5$7185	1.6745	$-.0^2$2678
10.0	$.0^5$4157	1.6583	.04546

11 FACTORIAL DE *n*

$$n! = 1 \bullet 2 \bullet 3 \bullet \cdots \bullet n$$

n	$n!$
0	1 (por definición)
1	1
2	2
3	6
4	24
5	120
6	720
7	5 040
8	40 320
9	362 880
10	3 628 800
11	39 916 800
12	479 001 600
13	6 227 020 800
14	87 178 291 200
15	1 307 674 368 000
16	20 922 789 888 000
17	355 687 428 096 000
18	6 402 373 705 728 000
19	121 645 100 408 832 000
20	2 432 902 008 176 640 000
21	51 090 942 171 709 440 000
22	1 124 000 727 777 607 680 000
23	25 852 016 738 884 976 640 000
24	620 448 401 733 239 439 360 000
25	15 511 210 043 330 985 984 000 000
26	403 291 461 126 605 635 584 000 000
27	10 888 869 450 418 352 160 768 000 000
28	304 888 344 611 713 860 501 504 000 000
29	8 841 761 993 739 701 954 543 616 000 000
30	265 252 859 812 191 058 636 308 480 000 000
31	8.22284×10^{33}
32	2.63131×10^{35}
33	8.68332×10^{36}
34	2.95233×10^{38}
35	1.03331×10^{40}
36	3.71993×10^{41}
37	1.37638×10^{43}
38	5.23023×10^{44}
39	2.03979×10^{46}
40	8.15915×10^{47}
41	3.34525×10^{49}
42	1.40501×10^{51}
43	6.04153×10^{52}
44	2.65827×10^{54}
45	1.19622×10^{56}
46	5.50262×10^{57}
47	2.58623×10^{59}
48	1.24139×10^{61}
49	6.08282×10^{62}
50	3.04141×10^{64}
51	1.55112×10^{66}
52	8.06582×10^{67}
53	4.27488×10^{69}
54	2.30844×10^{71}
55	1.26964×10^{73}
56	7.10999×10^{74}
57	4.05269×10^{76}
58	2.35056×10^{78}
59	1.38683×10^{80}
60	8.32099×10^{81}
61	5.07580×10^{83}
62	3.14700×10^{85}
63	1.98261×10^{87}
64	1.26887×10^{89}
65	8.24765×10^{90}
66	5.44345×10^{92}
67	3.64711×10^{94}
68	2.48004×10^{96}
69	1.71122×10^{98}
70	1.19786×10^{100}
71	8.50479×10^{101}
72	6.12345×10^{103}
73	4.47012×10^{105}
74	3.30789×10^{107}
75	2.48091×10^{109}
76	1.88549×10^{111}
77	1.45183×10^{113}
78	1.13243×10^{115}
79	8.94618×10^{116}
80	7.15695×10^{118}
81	5.79713×10^{120}
82	4.75364×10^{122}
83	3.94552×10^{124}
84	3.31424×10^{126}
85	2.81710×10^{128}
86	2.42271×10^{130}
87	2.10776×10^{132}
88	1.85483×10^{134}
89	1.65080×10^{136}
90	1.48572×10^{138}
91	1.35200×10^{140}
92	1.24384×10^{142}
93	1.15677×10^{144}
94	1.08737×10^{146}
95	1.03300×10^{148}
96	9.91678×10^{149}
97	9.61928×10^{151}
98	9.42689×10^{153}
99	9.33262×10^{155}
100	9.33262×10^{157}

12 FUNCIÓN GAMMA

$$\Gamma(x) = \int_x^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad \text{para } 1 \leqq x \leqq 2$$

[Para otros valores utilice la fórmula $\Gamma(x+1) = x\,\Gamma(x)$]

x	$\Gamma(x)$
1.00	1.00000
1.01	.99433
1.02	.98884
1.03	.98355
1.04	.97844
1.05	.97350
1.06	.96874
1.07	.96415
1.08	.95973
1.09	.95546
1.10	.95135
1.11	.94740
1.12	.94359
1.13	.93993
1.14	.93642
1.15	.93304
1.16	.92980
1.17	.92670
1.18	.92373
1.19	.92089
1.20	.91817
1.21	.91558
1.22	.91311
1.23	.91075
1.24	.90852
1.25	.90640
1.26	.90440
1.27	.90250
1.28	.90072
1.29	.89904
1.30	.89747
1.31	.89600
1.32	.89464
1.33	.89338
1.34	.89222
1.35	.89115
1.36	.89018
1.37	.88931
1.38	.88854
1.39	.88785
1.40	.88726
1.41	.88676
1.42	.88636
1.43	.88604
1.44	.88581
1.45	.88566
1.46	.88560
1.47	.88563
1.48	.88575
1.49	.88595
1.50	.88623

x	$\Gamma(x)$
1.50	.88623
1.51	.88659
1.52	.88704
1.53	.88757
1.54	.88818
1.55	.88887
1.56	.88964
1.57	.89049
1.58	.89142
1.59	.89243
1.60	.89352
1.61	.89468
1.62	.89592
1.63	.89724
1.64	.89864
1.65	.90012
1.66	.90167
1.67	.90330
1.68	.90500
1.69	.90678
1.70	.90864
1.71	.91057
1.72	.91258
1.73	.91467
1.74	.91683
1.75	.91906
1.76	.92137
1.77	.92376
1.78	.92623
1.79	.92877
1.80	.93138
1.81	.93408
1.82	.93685
1.83	.93969
1.84	.94261
1.85	.94561
1.86	.94869
1.87	.95184
1.88	.95507
1.89	.95838
1.90	.96177
1.91	.96523
1.92	.96877
1.93	.97240
1.94	.97610
1.95	.97988
1.96	.98374
1.97	.98768
1.98	.99171
1.99	.99581
2.00	1.00000

13 COEFICIENTES BINOMIALES

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{n-k},\quad 0!=1$$

Observe que cada número es la suma de otros dos números en la fila superior; uno de estos números se encuentra en la misma columna, mientras que el otro está en la columna precedente (por ejemplo: 56 = 35 + 21). El arreglo suele llamarse *triángulo de Pascal* (vea la fórmula 3.6, página 8).

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10
11	1	11	55	165	330	462	462	330	165	55
12	1	12	66	220	495	792	924	792	495	220
13	1	13	78	286	715	1 287	1 716	1 716	1 287	715
14	1	14	91	364	1 001	2 002	3 003	3 432	3 003	2 002
15	1	15	105	455	1 365	3 003	5 005	6 435	6 435	5 005
16	1	16	120	560	1 820	4 368	8 008	11 440	12 870	11 440
17	1	17	136	680	2 380	6 188	12 376	19 448	24 310	24 310
18	1	18	153	816	3 060	8 568	18 564	31 824	43 758	48 620
19	1	19	171	969	3 876	11 628	27 132	50 388	75 582	92 378
20	1	20	190	1 140	4 845	15 504	38 760	77 520	125 970	167 960
21	1	21	210	1 330	5 985	20 349	54 264	116 280	203 490	293 930
22	1	22	231	1 540	7 315	26 334	74 613	170 544	319 770	497 420
23	1	23	253	1 771	8 855	33 649	100 947	245 157	490 314	817 190
24	1	24	276	2 024	10 626	42 504	134 596	346 104	735 471	1 307 504
25	1	25	300	2 300	12 650	53 130	177 100	480 700	1 081 575	2 042 975
26	1	26	325	2 600	14 950	65 780	230 230	657 800	1 562 275	3 124 550
27	1	27	351	2 925	17 550	80 730	296 010	888 030	2 220 075	4 686 825
28	1	28	378	3 276	20 475	98 280	376 740	1 184 040	3 108 105	6 906 900
29	1	29	406	3 654	23 751	118 755	475 020	1 560 780	4 292 145	10 015 005
30	1	30	435	4 060	27 405	142 506	593 775	2 035 800	5 852 925	14 307 150

13 COEFICIENTES BINOMIALES

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}=\binom{n}{n-k},\quad 0!=1$$

(continuación)

n \ k	10	11	12	13	14	15
10	1					
11	11	1				
12	66	12	1			
13	286	78	13	1		
14	1 001	364	91	14	1	
15	3 003	1 365	455	105	15	1
16	8 008	4 368	1 820	560	120	16
17	19 448	12 376	6 188	2 380	680	136
18	43 758	31 824	18 564	8 568	3 060	816
19	92 378	75 582	50 388	27 132	11 628	3 876
20	184 756	167 960	125 970	77 520	38 760	15 504
21	352 716	352 716	293 930	203 490	116 280	54 264
22	646 646	705 432	646 646	497 420	319 770	170 544
23	1 144 066	1 352 078	1 352 078	1 144 066	817 190	490 314
24	1 961 256	2 496 144	2 704 156	2 496 144	1 961 256	1 307 504
25	3 268 760	4 457 400	5 200 300	5 200 300	4 457 400	3 268 760
26	5 311 735	7 726 160	9 657 700	10 400 600	9 657 700	7 726 160
27	8 436 285	13 037 895	17 383 860	20 058 300	20 058 300	17 383 860
28	13 123 110	21 474 180	30 421 755	37 442 160	40 116 600	37 442 160
29	20 030 010	34 597 290	51 895 935	67 863 915	77 558 760	77 558 760
30	30 045 015	54 627 300	86 493 225	119 759 850	145 422 675	155 117 520

Para $k > 15$ utilice el hecho de que $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$.

14 FUNCIONES DE BESSEL

$J_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1.0000	.9975	.9900	.9776	.9604	.9385	.9120	.8812	.8463	.8075
1.	.7652	.7196	.6711	.6201	.5669	.5118	.4554	.3980	.3400	.2818
2.	.2239	.1666	.1104	.0555	.0025	−.0484	−.0968	−.1424	−.1850	−.2243
3.	−.2601	−.2921	−.3202	−.3443	−.3643	−.3801	−.3918	−.3992	−.4026	−.4018
4.	−.3971	−.3887	−.3766	−.3610	−.3423	−.3205	−.2961	−.2693	−.2404	−.2097
5.	−.1776	−.1443	−.1103	−.0758	−.0412	−.0068	.0270	.0599	.0917	.1220
6.	.1506	.1773	.2017	.2238	.2433	.2601	.2740	.2851	.2931	.2981
7.	.3001	.2991	.2951	.2882	.2786	.2663	.2516	.2346	.2154	.1944
8.	.1717	.1475	.1222	.0960	.0692	.0419	.0146	−.0125	−.0392	−.0653
9.	−.0903	−.1142	−.1367	−.1577	−.1768	−.1939	−.2090	−.2218	−.2323	−.2403

15 FUNCIONES DE BESSEL

$J_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	.0000	.0499	.0995	.1483	.1960	.2423	.2867	.3290	.3688	.4059
1.	.4401	.4709	.4983	.5220	.5419	.5579	.5699	.5778	.5815	.5812
2.	.5767	.5683	.5560	.5399	.5202	.4971	.4708	.4416	.4097	.3754
3.	.3391	.3009	.2613	.2207	.1792	.1374	.0955	.0538	.0128	−.0272
4.	−.0660	−.1033	−.1386	−.1719	−.2028	−.2311	−.2566	−.2791	−.2985	−.3147
5.	−.3276	−.3371	−.3432	−.3460	−.3453	−.3414	−.3343	−.3241	−.3110	−.2951
6.	−.2767	−.2559	−.2329	−.2081	−.1816	−.1538	−.1250	−.0953	−.0652	−.0349
7.	−.0047	.0252	.0543	.0826	.1096	.1352	.1592	.1813	.2014	.2192
8.	.2346	.2476	.2580	.2657	.2708	.2731	.2728	.2697	.2641	.2559
9.	.2453	.2324	.2174	.2004	.1816	.1613	.1395	.1166	.0928	.0684

16 FUNCIONES DE BESSEL

$Y_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	$-\infty$	−1.5342	−1.0811	−.8073	−.6060	−.4445	−.3085	−.1907	−.0868	.0056
1.	.0883	.1622	.2281	.2865	.3379	.3824	.4204	.4520	.4774	.4968
2.	.5104	.5183	.5208	.5181	.5104	.4981	.4813	.4605	.4359	.4079
3.	.3769	.3431	.3071	.2691	.2296	.1890	.1477	.1061	.0645	.0234
4.	−.0169	−.0561	−.0938	−.1296	−.1633	−.1947	−.2235	−.2494	−.2723	−.2921
5.	−.3085	−.3216	−.3313	−.3374	−.3402	−.3395	−.3354	−.3282	−.3177	−.3044
6.	−.2882	−.2694	−.2483	−.2251	−.1999	−.1732	−.1452	−.1162	−.0864	−.0563
7.	−.0259	.0042	.0339	.0628	.0907	.1173	.1424	.1658	.1872	.2065
8.	.2235	.2381	.2501	.2595	.2662	.2702	.2715	.2700	.2659	.2592
9.	.2499	.2383	.2245	.2086	.1907	.1712	.1502	.1279	.1045	.0804

17 FUNCIONES DE BESSEL

$Y_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	$-\infty$	−6.4590	−3.3238	−2.2931	−1.7809	−1.4715	−1.2604	−1.1032	−.9781	−.8731
1.	−.7812	−.6981	−.6211	−.5485	−.4791	−.4123	−.3476	−.2847	−.2237	−.1644
2.	−.1070	−.0517	.0015	.0523	.1005	.1459	.1884	.2276	.2635	.2959
3.	.3247	.3496	.3707	.3879	.4010	.4102	.4154	.4167	.4141	.4078
4.	.3979	.3846	.3680	.3484	.3260	.3010	.2737	.2445	.2136	.1812
5.	.1479	.1137	.0792	.0445	.0101	−.0238	−.0568	−.0887	−.1192	−.1481
6.	−.1750	−.1998	−.2223	−.2422	−.2596	−.2741	−.2857	−.2945	−.3002	−.3029
7.	−.3027	−.2995	−.2934	−.2846	−.2731	−.2591	−.2428	−.2243	−.2039	−.1817
8.	−.1581	−.1331	−.1072	−.0806	−.0535	−.0262	.0011	.0280	.0544	.0799
9.	.1043	.1275	.1491	.1691	.1871	.2032	.2171	.2287	.2379	.2447

18 FUNCIONES DE BESSEL

$I_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1.000	1.003	1.010	1.023	1.040	1.063	1.092	1.126	1.167	1.213
1.	1.266	1.326	1.394	1.469	1.553	1.647	1.750	1.864	1.990	2.128
2.	2.280	2.446	2.629	2.830	3.049	3.290	3.553	3.842	4.157	4.503
3.	4.881	5.294	5.747	6.243	6.785	7.378	8.028	8.739	9.517	10.37
4.	11.30	12.32	13.44	14.67	16.01	17.48	19.09	20.86	22.79	24.91
5.	27.24	29.79	32.58	35.65	39.01	42.69	46.74	51.17	56.04	61.38
6.	67.23	73.66	80.72	88.46	96.96	106.3	116.5	127.8	140.1	153.7
7.	168.6	185.0	202.9	222.7	244.3	268.2	294.3	323.1	354.7	389.4
8.	427.6	469.5	515.6	566.3	621.9	683.2	750.5	824.4	905.8	995.2
9.	1094	1202	1321	1451	1595	1753	1927	2119	2329	2561

19 FUNCIONES DE BESSEL

$I_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	.0000	.0501	.1005	.1517	.2040	.2579	.3137	.3719	.4329	.4971
1.	.5652	.6375	.7147	.7973	.8861	.9817	1.085	1.196	1.317	1.448
2.	1.591	1.745	1.914	2.098	2.298	2.517	2.755	3.016	3.301	3.613
3.	3.953	4.326	4.734	5.181	5.670	6.206	6.793	7.436	8.140	8.913
4.	9.759	10.69	11.71	12.82	14.05	15.39	16.86	18.48	20.25	22.20
5.	24.34	26.68	29.25	32.08	35.18	38.59	42.33	46.44	50.95	55.90
6.	61.34	67.32	73.89	81.10	89.03	97.74	107.3	117.8	129.4	142.1
7.	156.0	171.4	188.3	206.8	227.2	249.6	274.2	301.3	331.1	363.9
8.	399.9	439.5	483.0	531.0	583.7	641.6	705.4	775.5	852.7	937.5
9.	1 031	1 134	1 247	1 371	1 508	1 658	1 824	2 006	2 207	2 428

20 FUNCIONES DE BESSEL

$K_0(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	2.4271	1.7527	1.3725	1.1145	.9244	.7775	.6605	.5653	.4867
1.	.4210	.3656	.3185	.2782	.2437	.2138	.1880	.1655	.1459	.1288
2.	.1139	.1008	.08927	.07914	.07022	.06235	.05540	.04926	.04382	.03901
3.	.03474	.03095	.02759	.02461	.02196	.01960	.01750	.01563	.01397	.01248
4.	.01116	$.0^{2}9980$	$.0^{2}8927$	$.0^{2}7988$	$.0^{2}7149$	$.0^{2}6400$	$.0^{2}5730$	$.0^{2}5132$	$.0^{2}4597$	$.0^{2}4119$
5.	$.0^{2}3691$	$.0^{2}3308$	$.0^{2}2966$	$.0^{2}2659$	$.0^{2}2385$	$.0^{2}2139$	$.0^{2}1918$	$.0^{2}1721$	$.0^{2}1544$	$.0^{2}1386$
6.	$.0^{2}1244$	$.0^{2}1117$	$.0^{2}1003$	$.0^{3}9001$	$.0^{3}8083$	$.0^{3}7259$	$.0^{3}6520$	$.0^{3}5857$	$.0^{3}5262$	$.0^{3}4728$
7.	$.0^{3}4248$	$.0^{3}3817$	$.0^{3}3431$	$.0^{3}3084$	$.0^{3}2772$	$.0^{3}2492$	$.0^{3}2240$	$.0^{3}2014$	$.0^{3}1811$	$.0^{3}1629$
8.	$.0^{3}1465$	$.0^{3}1317$	$.0^{3}1185$	$.0^{3}1066$	$.0^{4}9588$	$.0^{4}8626$	$.0^{4}7761$	$.0^{4}6983$	$.0^{4}6283$	$.0^{4}5654$
9.	$.0^{4}5088$	$.0^{4}4579$	$.0^{4}4121$	$.0^{4}3710$	$.0^{4}3339$	$.0^{4}3006$	$.0^{4}2706$	$.0^{4}2436$	$.0^{4}2193$	$.0^{4}1975$

21 FUNCIONES DE BESSEL

$K_1(x)$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	9.8538	4.7760	3.0560	2.1844	1.6564	1.3028	1.0503	.8618	.7165
1.	.6019	.5098	.4346	.3725	.3208	.2774	.2406	.2094	.1826	.1597
2.	.1399	.1227	.1079	.09498	.08372	.07389	.06528	.05774	.05111	.04529
3.	.04016	.03563	.03164	.02812	.02500	.02224	.01979	.01763	.01571	.01400
4.	.01248	.01114	$.0^{2}9938$	$.0^{2}8872$	$.0^{2}7923$	$.0^{2}7078$	$.0^{2}6325$	$.0^{2}5654$	$.0^{2}5055$	$.0^{2}4521$
5.	$.0^{2}4045$	$.0^{2}3619$	$.0^{2}3239$	$.0^{2}2900$	$.0^{2}2597$	$.0^{2}2326$	$.0^{2}2083$	$.0^{2}1866$	$.0^{2}1673$	$.0^{2}1499$
6.	$.0^{2}1344$	$.0^{2}1205$	$.0^{2}1081$	$.0^{3}9691$	$.0^{3}8693$	$.0^{3}7799$	$.0^{3}6998$	$.0^{3}6280$	$.0^{3}5636$	$.0^{3}5059$
7.	$.0^{3}4542$	$.0^{3}4078$	$.0^{3}3662$	$.0^{3}3288$	$.0^{3}2953$	$.0^{3}2653$	$.0^{3}2383$	$.0^{3}2141$	$.0^{3}1924$	$.0^{3}1729$
8.	$.0^{3}1554$	$.0^{3}1396$	$.0^{3}1255$	$.0^{3}1128$	$.0^{3}1014$	$.0^{4}9120$	$.0^{4}8200$	$.0^{4}7374$	$.0^{4}6631$	$.0^{4}5964$
9.	$.0^{4}5364$	$.0^{4}4825$	$.0^{4}4340$	$.0^{4}3904$	$.0^{4}3512$	$.0^{4}3160$	$.0^{4}2843$	$.0^{4}2559$	$.0^{4}2302$	$.0^{4}2072$

22 FUNCIONES DE BESSEL

Ber(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	1.0000	1.0000	1.0000	.9999	.9996	.9990	.9980	.9962	.9936	.9898
1.	.9844	.9771	.9676	.9554	.9401	.9211	.8979	.8700	.8367	.7975
2.	.7517	.6987	.6377	.5680	.4890	.4000	.3001	.1887	.06511	−.07137
3.	−.2214	−.3855	−.5644	−.7584	−.9680	−1.1936	−1.4353	−1.6933	−1.9674	−2.2576
4.	−2.5634	−2.8843	−3.2195	−3.5679	−3.9283	−4.2991	−4.6784	−5.0639	−5.4531	−5.8429
5.	−6.2301	−6.6107	−6.9803	−7.3344	−7.6674	−7.9736	−8.2466	−8.4794	−8.6644	−8.7937
6.	−8.8583	−8.8491	−8.7561	−8.5688	−8.2762	−7.8669	−7.3287	−6.6492	−5.8155	−4.8146
7.	−3.6329	−2.2571	−.6737	1.1308	3.1695	5.4550	7.9994	10.814	13.909	17.293
8.	20.974	24.957	29.245	33.840	38.738	43.936	49.423	55.187	61.210	67.469
9.	73.936	80.576	87.350	94.208	101.10	107.95	114.70	121.26	127.54	133.43

23 FUNCIONES DE BESSEL

Bei(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	.0000	.0²2500	.01000	.02250	.04000	.06249	.08998	.1224	.1599	.2023
1.	.2496	.3017	.3587	.4204	.4867	.5576	.6327	.7120	.7953	.8821
2.	.9723	1.0654	1.1610	1.2585	1.3575	1.4572	1.5569	1.6557	1.7529	1.8472
3.	1.9376	2.0228	2.1016	2.1723	2.2334	2.2832	2.3199	2.3413	2.3454	2.3300
4.	2.2927	2.2309	2.1422	2.0236	1.8726	1.6860	1.4610	1.1946	.8837	.5251
5.	.1160	−.3467	−.8658	−1.4443	−2.0845	−2.7890	−3.5597	−4.3986	−5.3068	−6.2854
6.	−7.3347	−8.4545	−9.6437	−10.901	−12.223	−13.607	−15.047	−16.538	−18.074	−19.644
7.	−21.239	−22.848	−24.456	−26.049	−27.609	−29.116	−30.548	−31.882	−33.092	−34.147
8.	−35.017	−35.667	−36.061	−36.159	−35.920	−35.298	−34.246	−32.714	−30.651	−28.003
9.	−24.713	−20.724	−15.976	−10.412	−3.9693	3.4106	11.787	21.218	31.758	43.459

24 FUNCIONES DE BESSEL

Ker(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	∞	2.4205	1.7331	1.3372	1.0626	.8559	.6931	.5614	.4529	.3625
1.	.2867	.2228	.1689	.1235	.08513	.05293	.02603	$.0^{2}3691$	−.01470	−.02966
2.	−.04166	−.05111	−.05834	−.06367	−.06737	−.06969	−.07083	−.07097	−.07030	−.06894
3.	−.06703	−.06468	−.06198	−.05903	−.05590	−.05264	−.04932	−.04597	−.04265	−.03937
4.	−.03618	−.03308	−.03011	−.02726	−.02456	−.02200	−.01960	−.01734	−.01525	−.01330
5.	−.01151	$-.0^{2}9865$	$-.0^{2}8359$	$-.0^{2}6989$	$-.0^{2}5749$	$-.0^{2}4632$	$-.0^{2}3632$	$-.0^{2}2740$	$-.0^{2}1952$	$-.0^{2}1258$
6.	$-.0^{3}6530$	$-.0^{3}1295$	$.0^{3}3191$	$.0^{3}6991$	$.0^{2}1017$	$.0^{2}1278$	$.0^{2}1488$	$.0^{2}1653$	$.0^{2}1777$	$.0^{2}1866$
7.	$.0^{2}1922$	$.0^{2}1951$	$.0^{2}1956$	$.0^{2}1940$	$.0^{2}1907$	$.0^{2}1860$	$.0^{2}1800$	$.0^{2}1731$	$.0^{2}1655$	$.0^{2}1572$
8.	$.0^{2}1486$	$.0^{2}1397$	$.0^{2}1306$	$.0^{2}1216$	$.0^{2}1126$	$.0^{2}1037$	$.0^{3}9511$	$.0^{3}8675$	$.0^{3}7871$	$.0^{3}7102$
9.	$.0^{3}6372$	$.0^{3}5681$	$.0^{3}5030$	$.0^{3}4422$	$.0^{3}3855$	$.0^{3}3330$	$.0^{3}2846$	$.0^{3}2402$	$.0^{3}1996$	$.0^{3}1628$

25 FUNCIONES DE BESSEL

Kei(x)

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.	−.7854	−.7769	−.7581	−.7331	−.7038	−.6716	−.6374	−.6022	−.5664	−.5305
1.	−.4950	−.4601	−.4262	−.3933	−.3617	−.3314	−.3026	−.2752	−.2494	−.2251
2.	−.2024	−.1812	−.1614	−.1431	−.1262	−.1107	−.09644	−.08342	−.07157	−.06083
3.	−.05112	−.04240	−.03458	−.02762	−.02145	−.01600	−.01123	$-.0^{2}7077$	$-.0^{2}3487$	$-.0^{3}4108$
4.	$.0^{2}2198$	$.0^{2}4386$	$.0^{2}6194$	$.0^{2}7661$	$.0^{2}8826$	$.0^{2}9721$	.01038	.01083	.01110	.01121
5.	.01119	.01105	.01082	.01051	.01014	$.0^{2}9716$	$.0^{2}9255$	$.0^{2}8766$	$.0^{2}8258$	$.0^{2}7739$
6.	$.0^{2}7216$	$.0^{2}6696$	$.0^{2}6183$	$.0^{2}5681$	$.0^{2}5194$	$.0^{2}4724$	$.0^{2}4274$	$.0^{2}3846$	$.0^{2}3440$	$.0^{2}3058$
7.	$.0^{2}2700$	$.0^{2}2366$	$.0^{2}2057$	$.0^{2}1770$	$.0^{2}1507$	$.0^{2}1267$	$.0^{2}1048$	$.0^{3}8498$	$.0^{3}6714$	$.0^{3}5117$
8.	$.0^{3}3696$	$.0^{3}2440$	$.0^{3}1339$	$.0^{4}3809$	$-.0^{4}4449$	$-.0^{3}1149$	$-.0^{3}1742$	$-.0^{3}2233$	$-.0^{3}2632$	$-.0^{3}2949$
9.	$-.0^{3}3192$	$-.0^{3}3368$	$-.0^{3}3486$	$-.0^{3}3552$	$-.0^{3}3574$	$-.0^{3}3557$	$-.0^{3}3508$	$-.0^{3}3430$	$-.0^{3}3329$	$-.0^{3}3210$

26 VALORES APROXIMADOS PARA LAS RAÍCES DE LAS FUNCIONES DE BESSEL

La siguiente tabla enlista las primeras raíces positivas de varias ecuaciones. Observe que en todos los casos listados, las raíces grandes sucesivas difieren aproximadamente por $\pi = 3.14159...$

	$n = 0$	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
$J_n(x) = 0$	2.4048	3.8317	5.1356	6.3802	7.5883	8.7715	9.9361
	5.5201	7.0156	8.4172	9.7610	11.0647	12.3386	13.5893
	8.6537	10.1735	11.6198	13.0152	14.3725	15.7002	17.0038
	11.7915	13.3237	14.7960	16.2235	17.6160	18.9801	20.3208
	14.9309	16.4706	17.9598	19.4094	20.8269	22.2178	23.5861
	18.0711	19.6159	21.1170	22.5827	24.0190	25.4303	26.8202
$Y_n(x) = 0$	0.8936	2.1971	3.3842	4.5270	5.6452	6.7472	7.8377
	3.9577	5.4297	6.7938	8.0976	9.3616	10.5972	11.8110
	7.0861	8.5960	10.0235	11.3965	12.7301	14.0338	15.3136
	10.2223	11.7492	13.2100	14.6231	15.9996	17.3471	18.6707
	13.3611	14.8974	16.3790	17.8185	19.2244	20.6029	21.9583
	16.5009	18.0434	19.5390	20.9973	22.4248	23.8265	25.2062
$J_n'(x) = 0$	0.0000	1.8412	3.0542	4.2012	5.3176	6.4156	7.5013
	3.8317	5.3314	6.7061	8.0152	9.2824	10.5199	11.7349
	7.0156	8.5363	9.9695	11.3459	12.6819	13.9872	15.2682
	10.1735	11.7060	13.1704	14.5859	15.9641	17.3128	18.6374
	13.3237	14.8636	16.3475	17.7888	19.1960	20.5755	21.9317
	16.4706	18.0155	19.5129	20.9725	22.4010	23.8036	25.1839
$Y_n'(x) = 0$	2.1971	3.6830	5.0026	6.2536	7.4649	8.6496	9.8148
	5.4297	6.9415	8.3507	9.6988	11.0052	12.2809	13.5328
	8.5960	10.1234	11.5742	12.9724	14.3317	15.6608	16.9655
	11.7492	13.2858	14.7609	16.1905	17.5844	18.9497	20.2913
	14.8974	16.4401	17.9313	19.3824	20.8011	22.1928	23.5619
	18.0434	19.5902	21.0929	22.5598	23.9970	25.4091	26.7995

27 POLINOMIOS DE LEGENDRE $P_n(x)$

$[P_0(x) = 1,\ P_1(x) = x]$

x	$P_2(x)$	$P_3(x)$	$P_4(x)$	$P_5(x)$
.00	−.5000	.0000	.3750	.0000
.05	−.4963	−.0747	.3657	.0927
.10	−.4850	−.1475	.3379	.1788
.15	−.4663	−.2166	.2928	.2523
.20	−.4400	−.2800	.2320	.3075
.25	−.4063	−.3359	.1577	.3397
.30	−.3650	−.3825	.0729	.3454
.35	−.3163	−.4178	−.0187	.3225
.40	−.2600	−.4400	−.1130	.2706
.45	−.1963	−.4472	−.2050	.1917
.50	−.1250	−.4375	−.2891	.0898
.55	−.0463	−.4091	−.3590	−.0282
.60	.0400	−.3600	−.4080	−.1526
.65	.1338	−.2884	−.4284	−.2705
.70	.2350	−.1925	−.4121	−.3652
.75	.3438	−.0703	−.3501	−.4164
.80	.4600	.0800	−.2330	−.3995
.85	.5838	.2603	−.0506	−.2857
.90	.7150	.4725	.2079	−.0411
.95	.8538	.7184	.5541	.3727
1.00	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

28 POLINOMIOS DE LEGENDRE $P_n(\cos\theta)$

$[P_0(\cos\theta) = 1]$

θ	$P_1(\cos\theta)$	$P_2(\cos\theta)$	$P_3(\cos\theta)$	$P_4(\cos\theta)$	$P_5(\cos\theta)$
0°	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
5°	.9962	.9886	.9773	.9623	.9437
10°	.9848	.9548	.9106	.8532	.7840
15°	.9659	.8995	.8042	.6847	.5471
20°	.9397	.8245	.6649	.4750	.2715
25°	.9063	.7321	.5016	.2465	.0009
30°	.8660	.6250	.3248	.0234	−.2233
35°	.8192	.5065	.1454	−.1714	−.3691
40°	.7660	.3802	−.0252	−.3190	−.4197
45°	.7071	.2500	−.1768	−.4063	−.3757
50°	.6428	.1198	−.3002	−.4275	−.2545
55°	.5736	−.0065	−.3886	−.3852	−.0868
60°	.5000	−.1250	−.4375	−.2891	.0898
65°	.4226	−.2321	−.4452	−.1552	.2381
70°	.3420	−.3245	−.4130	−.0038	.3281
75°	.2588	−.3995	−.3449	.1434	.3427
80°	.1737	−.4548	−.2474	.2659	.2810
85°	.0872	−.4886	−.1291	.3468	.1577
90°	.0000	−.5000	.0000	.3750	.0000

29 INTEGRALES ELÍPTICAS COMPLETAS DE PRIMER Y SEGUNDO TIPO

$$K = \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}}, \quad E = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sen}^2 \theta}\, d\theta, \quad k = \operatorname{sen} \psi$$

ψ	K	E
0°	1.5708	1.5708
1	1.5709	1.5707
2	1.5713	1.5703
3	1.5719	1.5697
4	1.5727	1.5689
5	1.5738	1.5678
6	1.5751	1.5665
7	1.5767	1.5649
8	1.5785	1.5632
9	1.5805	1.5611
10	1.5828	1.5589
11	1.5854	1.5564
12	1.5882	1.5537
13	1.5913	1.5507
14	1.5946	1.5476
15	1.5981	1.5442
16	1.6020	1.5405
17	1.6061	1.5367
18	1.6105	1.5326
19	1.6151	1.5283
20	1.6200	1.5238
21	1.6252	1.5191
22	1.6307	1.5141
23	1.6365	1.5090
24	1.6426	1.5037
25	1.6490	1.4981
26	1.6557	1.4924
27	1.6627	1.4864
28	1.6701	1.4803
29	1.6777	1.4740
30	1.6858	1.4675

ψ	K	E
30°	1.6858	1.4675
31	1.6941	1.4608
32	1.7028	1.4539
33	1.7119	1.4469
34	1.7214	1.4397
35	1.7312	1.4323
36	1.7415	1.4248
37	1.7522	1.4171
38	1.7633	1.4092
39	1.7748	1.4013
40	1.7868	1.3931
41	1.7992	1.3849
42	1.8122	1.3765
43	1.8256	1.3680
44	1.8396	1.3594
45	1.8541	1.3506
46	1.8691	1.3418
47	1.8848	1.3329
48	1.9011	1.3238
49	1.9180	1.3147
50	1.9356	1.3055
51	1.9539	1.2963
52	1.9729	1.2870
53	1.9927	1.2776
54	2.0133	1.2681
55	2.0347	1.2587
56	2.0571	1.2492
57	2.0804	1.2397
58	2.1047	1.2301
59	2.1300	1.2206
60	2.1565	1.2111

ψ	K	E
60°	2.1565	1.2111
61	2.1842	1.2015
62	2.2132	1.1920
63	2.2435	1.1826
64	2.2754	1.1732
65	2.3088	1.1638
66	2.3439	1.1545
67	2.3809	1.1453
68	2.4198	1.1362
69	2.4610	1.1272
70	2.5046	1.1184
71	2.5507	1.1096
72	2.5998	1.1011
73	2.6521	1.0927
74	2.7081	1.0844
75	2.7681	1.0764
76	2.8327	1.0686
77	2.9026	1.0611
78	2.9786	1.0538
79	3.0617	1.0468
80	3.1534	1.0401
81	3.2553	1.0338
82	3.3699	1.0278
83	3.5004	1.0223
84	3.6519	1.0172
85	3.8317	1.0127
86	4.0528	1.0086
87	4.3387	1.0053
88	4.7427	1.0026
89	5.4349	1.0008
90	∞	1.0000

30 INTEGRALES ELÍPTICAS INCOMPLETAS DE PRIMER TIPO

$$F(k,\phi)=\int_0^{\phi}\frac{d\theta}{\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}},\quad k=\mathrm{sen}\,\psi$$

ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	0.1745	0.1746	0.1746	0.1748	0.1749	0.1751	0.1752	0.1753	0.1754	0.1754
20°	0.3491	0.3493	0.3499	0.3508	0.3520	0.3533	0.3545	0.3555	0.3561	0.3564
30°	0.5236	0.5243	0.5263	0.5294	0.5334	0.5379	0.5422	0.5459	0.5484	0.5493
40°	0.6981	0.6997	0.7043	0.7116	0.7213	0.7323	0.7436	0.7535	0.7604	0.7629
50°	0.8727	0.8756	0.8842	0.8982	0.9173	0.9401	0.9647	0.9876	1.0044	1.0107
60°	1.0472	1.0519	1.0660	1.0896	1.1226	1.1643	1.2126	1.2619	1.3014	1.3170
70°	1.2217	1.2286	1.2495	1.2853	1.3372	1.4068	1.4944	1.5959	1.6918	1.7354
80°	1.3963	1.4056	1.4344	1.4846	1.5597	1.6660	1.8125	2.0119	2.2653	2.4362
90°	1.5708	1.5828	1.6200	1.6858	1.7868	1.9356	2.1565	2.5046	3.1534	∞

31 INTEGRALES ELÍPTICAS INCOMPLETAS DE SEGUNDO TIPO

$$E(k,\phi)=\int_0^{\phi}\sqrt{1-k^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta}\,d\theta,\quad k=\mathrm{sen}\,\psi$$

ϕ \ ψ	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°
0°	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10°	0.1745	0.1745	0.1744	0.1743	0.1742	0.1740	0.1739	0.1738	0.1737	0.1736
20°	0.3491	0.3489	0.3483	0.3473	0.3462	0.3450	0.3438	0.3429	0.3422	0.3420
30°	0.5236	0.5229	0.5209	0.5179	0.5141	0.5100	0.5061	0.5029	0.5007	0.5000
40°	0.6981	0.6966	0.6921	0.6851	0.6763	0.6667	0.6575	0.6497	0.6446	0.6428
50°	0.8727	0.8698	0.8614	0.8483	0.8317	0.8134	0.7954	0.7801	0.7697	0.7660
60°	1.0472	1.0426	1.0290	1.0076	0.9801	0.9493	0.9184	0.8914	0.8728	0.8660
70°	1.2217	1.2149	1.1949	1.1632	1.1221	1.0750	1.0266	0.9830	0.9514	0.9397
80°	1.3963	1.3870	1.3597	1.3161	1.2590	1.1926	1.1225	1.0565	1.0054	0.9848
90°	1.5708	1.5589	1.5238	1.4675	1.3931	1.3055	1.2111	1.1184	1.0401	1.0000

32

INTERÉS COMPUESTO: $(1 + r)^n$

Si se deposita un principal P a una tasa de interés r compuesta anualmente (r en decimales), la cantidad acumulada en n años es $A = P(1 + r)^n$.

n \ r	1%	1¼%	1½%	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	1.0100	1.0125	1.0150	1.0200	1.0250	1.0300	1.0400	1.0500	1.0600
2	1.0201	1.0252	1.0302	1.0404	1.0506	1.0609	1.0816	1.1025	1.1236
3	1.0303	1.0380	1.0457	1.0612	1.0769	1.0927	1.1249	1.1576	1.1910
4	1.0406	1.0509	1.0614	1.0824	1.1038	1.1255	1.1699	1.2155	1.2625
5	1.0510	1.0641	1.0773	1.1041	1.1314	1.1593	1.2167	1.2763	1.3382
6	1.0615	1.0774	1.0934	1.1262	1.1597	1.1941	1.2653	1.3401	1.4185
7	1.0721	1.0909	1.1098	1.1487	1.1887	1.2299	1.3159	1.4071	1.5036
8	1.0829	1.1045	1.1265	1.1717	1.2184	1.2668	1.3688	1.4775	1.5938
9	1.0937	1.1183	1.1434	1.1951	1.2489	1.3048	1.4233	1.5513	1.6895
10	1.1046	1.1323	1.1605	1.2190	1.2801	1.3439	1.4802	1.6289	1.7908
11	1.1157	1.1464	1.1779	1.2434	1.3121	1.3842	1.5395	1.7103	1.8983
12	1.1268	1.1608	1.1956	1.2682	1.3449	1.4258	1.6010	1.7959	2.0122
13	1.1381	1.1753	1.2136	1.2936	1.3785	1.4685	1.6651	1.8856	2.1329
14	1.1495	1.1900	1.2318	1.3195	1.4130	1.5126	1.7317	1.9799	2.2609
15	1.1610	1.2048	1.2502	1.3459	1.4483	1.5580	1.8009	2.0789	2.3966
16	1.1726	1.2199	1.2690	1.3728	1.4845	1.6047	1.8730	2.1829	2.5404
17	1.1843	1.2351	1.2880	1.4002	1.5216	1.6528	1.9479	2.2920	2.6928
18	1.1961	1.2506	1.3073	1.4282	1.5597	1.7024	2.0258	2.4066	2.8543
19	1.2081	1.2662	1.3270	1.4568	1.5987	1.7535	2.1068	2.5270	3.0256
20	1.2202	1.2820	1.3469	1.4859	1.6386	1.8061	2.1911	2.6533	3.2071
21	1.2324	1.2981	1.3671	1.5157	1.6796	1.8603	2.2788	2.7860	3.3996
22	1.2447	1.3143	1.3876	1.5460	1.7216	1.9161	2.3699	2.9253	3.6035
23	1.2572	1.3307	1.4084	1.5769	1.7646	1.9736	2.4647	3.0715	3.8197
24	1.2697	1.3474	1.4295	1.6084	1.8087	2.0328	2.5633	3.2251	4.0489
25	1.2824	1.3642	1.4509	1.6406	1.8539	2.0938	2.6658	3.3864	4.2919
26	1.2953	1.3812	1.4727	1.6734	1.9003	2.1566	2.7725	3.5557	4.5494
27	1.3082	1.3985	1.4948	1.7069	1.9478	2.2213	2.8834	3.7335	4.8223
28	1.3213	1.4160	1.5172	1.7410	1.9965	2.2879	2.9987	3.9201	5.1117
29	1.3345	1.4337	1.5400	1.7758	2.0464	2.3566	3.1187	4.1161	5.4184
30	1.3478	1.4516	1.5631	1.8114	2.0976	2.4273	3.2434	4.3219	5.7435
31	1.3613	1.4698	1.5865	1.8476	2.1500	2.5001	3.3731	4.5380	6.0881
32	1.3749	1.4881	1.6103	1.8845	2.2038	2.5751	3.5081	4.7649	6.4534
33	1.3887	1.5067	1.6345	1.9222	2.2589	2.6523	3.6484	5.0032	6.8406
34	1.4026	1.5256	1.6590	1.9607	2.3153	2.7319	3.7943	5.2533	7.2510
35	1.4166	1.5446	1.6839	1.9999	2.3732	2.8139	3.9461	5.5160	7.6861
36	1.4308	1.5639	1.7091	2.0399	2.4325	2.8983	4.1039	5.7918	8.1473
37	1.4451	1.5835	1.7348	2.0807	2.4933	2.9852	4.2681	6.0814	8.6361
38	1.4595	1.6033	1.7608	2.1223	2.5557	3.0748	4.4388	6.3855	9.1543
39	1.4741	1.6233	1.7872	2.1647	2.6196	3.1670	4.6164	6.7048	9.7035
40	1.4889	1.6436	1.8140	2.2080	2.6851	3.2620	4.8010	7.0400	10.2857
41	1.5038	1.6642	1.8412	2.2522	2.7522	3.3599	4.9931	7.3920	10.9029
42	1.5188	1.6850	1.8688	2.2972	2.8210	3.4607	5.1928	7.7616	11.5570
43	1.5340	1.7060	1.8969	2.3432	2.8915	3.5645	5.4005	8.1497	12.2505
44	1.5493	1.7274	1.9253	2.3901	2.9638	3.6715	5.6165	8.5572	12.9855
45	1.5648	1.7489	1.9542	2.4379	3.0379	3.7816	5.8412	8.9850	13.7646
46	1.5805	1.7708	1.9835	2.4866	3.1139	3.8950	6.0748	9.4343	14.5905
47	1.5963	1.7929	2.0133	2.5363	3.1917	4.0119	6.3178	9.9060	15.4659
48	1.6122	1.8154	2.0435	2.5871	3.2715	4.1323	6.5705	10.4013	16.3939
49	1.6283	1.8380	2.0741	2.6388	3.3533	4.2562	6.8333	10.9213	17.3775
50	1.6446	1.8610	2.1052	2.6916	3.4371	4.3839	7.1067	11.4674	18.4202

33 VALOR PRESENTE DE UNA CANTIDAD: $(1 + r)^{-n}$

El valor presente P que se convertirá en A después de n años a una tasa de interés r compuesta anualmente (r en decimales) es $P = A(1 + r)^{-n}$.

n \ r	1%	1¼%	1½%	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	.99010	.98765	.98522	.98039	.97561	.97087	.96154	.95238	.94340
2	.98030	.97546	.97066	.96117	.95181	.94260	.92456	.90703	.89000
3	.97059	.96342	.95632	.94232	.92860	.91514	.88900	.86384	.83962
4	.96098	.95152	.94218	.92385	.90595	.88849	.85480	.82270	.79209
5	.95147	.93978	.92826	.90573	.88385	.86261	.82193	.78353	.74726
6	.94205	.92817	.91454	.88797	.86230	.83748	.79031	.74622	.70496
7	.93272	.91672	.90103	.87056	.84127	.81309	.75992	.71068	.66506
8	.92348	.90540	.88771	.85349	.82075	.78941	.73069	.67684	.62741
9	.91434	.89422	.87459	.83676	.80073	.76642	.70259	.64461	.59190
10	.90529	.88318	.86167	.82035	.78120	.74409	.67556	.61391	.55839
11	.89632	.87228	.84893	.80426	.76214	.72242	.64958	.58468	.52679
12	.88745	.86151	.83639	.78849	.74356	.70138	.62460	.55684	.49697
13	.87866	.85087	.82403	.77303	.72542	.68095	.60057	.53032	.46884
14	.86996	.84037	.81185	.75788	.70773	.66112	.57748	.50507	.44230
15	.86135	.82999	.79985	.74301	.69047	.64186	.55526	.48102	.41727
16	.85282	.81975	.78803	.72845	.67362	.62317	.53391	.45811	.39365
17	.84438	.80963	.77639	.71416	.65720	.60502	.51337	.43630	.37136
18	.83602	.79963	.76491	.70016	.64117	.58739	.49363	.41552	.35034
19	.82774	.78976	.75361	.68643	.62553	.57029	.47464	.39573	.33051
20	.81954	.78001	.74247	.67297	.61027	.55368	.45639	.37689	.31180
21	.81143	.77038	.73150	.65978	.59539	.53755	.43883	.35894	.29416
22	.80340	.76087	.72069	.64684	.58086	.52189	.42196	.34185	.27751
23	.79544	.75147	.71004	.63416	.56670	.50669	.40573	.32557	.26180
24	.78757	.74220	.69954	.62172	.55288	.49193	.39012	.31007	.24698
25	.77977	.73303	.68921	.60953	.53939	.47761	.37512	.29530	.23300
26	.77205	.72398	.67902	.59758	.52623	.46369	.36069	.28124	.21981
27	.76440	.71505	.66899	.58586	.51340	.45019	.34682	.26785	.20737
28	.75684	.70622	.65910	.57437	.50088	.43708	.33348	.25509	.19563
29	.74934	.69750	.64936	.56311	.48866	.42435	.32065	.24295	.18456
30	.74192	.68889	.63976	.55207	.47674	.41199	.30832	.23138	.17411
31	.73458	.68038	.63031	.54125	.46511	.39999	.29646	.22036	.16425
32	.72730	.67198	.62099	.53063	.45377	.38834	.28506	.20987	.15496
33	.72010	.66369	.61182	.52023	.44270	.37703	.27409	.19987	.14619
34	.71297	.65549	.60277	.51003	.43191	.36604	.26355	.19035	.13791
35	.70591	.64740	.59387	.50003	.42137	.35538	.25342	.18129	.13011
36	.69892	.63941	.58509	.49022	.41109	.34503	.24367	.17266	.12274
37	.69200	.63152	.57644	.48061	.40107	.33498	.23430	.16444	.11579
38	.68515	.62372	.56792	.47119	.39128	.32523	.22529	.15661	.10924
39	.67837	.61602	.55953	.46195	.38174	.31575	.21662	.14915	.10306
40	.67165	.60841	.55126	.45289	.37243	.30656	.20829	.14205	.09722
41	.66500	.60090	.54312	.44401	.36335	.29763	.20028	.13528	.09172
42	.65842	.59348	.53509	.43530	.35448	.28896	.19257	.12884	.08653
43	.65190	.58616	.52718	.42677	.34584	.28054	.18517	.12270	.08163
44	.64545	.57892	.51939	.41840	.33740	.27237	.17805	.11686	.07701
45	.63905	.57177	.51171	.41020	.32917	.26444	.17120	.11130	.07265
46	.63273	.56471	.50415	.40215	.32115	.25674	.16461	.10600	.06854
47	.62646	.55774	.49670	.39427	.31331	.24926	.15828	.10095	.06466
48	.62026	.55086	.48936	.38654	.30567	.24200	.15219	.09614	.06100
49	.61412	.54406	.48213	.37896	.29822	.23495	.14634	.09156	.05755
50	.60804	.53734	.47500	.37153	.29094	.22811	.14071	.08720	.05429

34

MONTO TOTAL DE UNA ANUALIDAD: $\frac{(1+r)^n - 1}{r}$

Si al final de cada año se deposita una cantidad P a una tasa de interés r compuesta anualmente (en decimales), el monto acumulado en n años es $P\left[\frac{(1+r)^n - 1}{r}\right]$. Este proceso suele llamarse *anualidad*.

n \ r	1%	1¼%	1½%	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
2	2.0100	2.0125	2.0150	2.0200	2.0250	2.0300	2.0400	2.0500	2.0600
3	3.0301	3.0377	3.0452	3.0604	3.0756	3.0909	3.1216	3.1525	3.1836
4	4.0604	4.0756	4.0909	4.1216	4.1525	4.1836	4.2465	4.3101	4.3746
5	5.1010	5.1266	5.1523	5.2040	5.2563	5.3091	5.4163	5.5256	5.6371
6	6.1520	6.1907	6.2296	6.3081	6.3877	6.4684	6.6330	6.8019	6.9753
7	7.2135	7.2680	7.3230	7.4343	7.5474	7.6625	7.8983	8.1420	8.3938
8	8.2857	8.3589	8.4328	8.5830	8.7361	8.8923	9.2142	9.5491	9.8975
9	9.3685	9.4634	9.5593	9.7546	9.9545	10.1591	10.5828	11.0266	11.4913
10	10.4622	10.5817	10.7027	10.9497	11.2034	11.4639	12.0061	12.5779	13.1808
11	11.5668	11.7139	11.8633	12.1687	12.4835	12.8078	13.4864	14.2068	14.9716
12	12.6825	12.8604	13.0412	13.4121	13.7956	14.1920	15.0258	15.9171	16.8699
13	13.8093	14.0211	14.2368	14.6803	15.1404	15.6178	16.6268	17.7130	18.8821
14	14.9474	15.1964	15.4504	15.9739	16.5190	17.0863	18.2919	19.5986	21.0151
15	16.0969	16.3863	16.6821	17.2934	17.9319	18.5989	20.0236	21.5786	23.2760
16	17.2579	17.5912	17.9324	18.6393	19.3802	20.1569	21.8245	23.6575	25.6725
17	18.4304	18.8111	19.2014	20.0121	20.8647	21.7616	23.6975	25.8404	28.2129
18	19.6147	20.0462	20.4894	21.4123	22.3863	23.4144	25.6454	28.1324	30.9057
19	20.8109	21.2968	21.7967	22.8406	23.9460	25.1169	27.6712	30.5390	33.7600
20	22.0190	22.5630	23.1237	24.2974	25.5447	26.8704	29.7781	33.0660	36.7856
21	23.2392	23.8450	24.4705	25.7833	27.1833	28.6765	31.9692	35.7193	39.9927
22	24.4716	25.1431	25.8376	27.2990	28.8629	30.5368	34.2480	38.5052	43.3923
23	25.7163	26.4574	27.2251	28.8450	30.5844	32.4529	36.6179	41.4305	46.9958
24	26.9735	27.7881	28.6335	30.4219	32.3490	34.4265	39.0826	44.5020	50.8156
25	28.2432	29.1354	30.0630	32.0303	34.1578	36.4593	41.6459	47.7271	54.8645
26	29.5256	30.4996	31.5140	33.6709	36.0117	38.5530	44.3117	51.1135	59.1564
27	30.8209	31.8809	32.9867	35.3443	37.9120	40.7096	47.0842	54.6691	63.7058
28	32.1291	33.2794	34.4815	37.0512	39.8598	42.9309	49.9676	58.4026	68.5281
29	33.4504	34.6954	35.9987	38.7922	41.8563	45.2189	52.9663	62.3227	73.6398
30	34.7849	36.1291	37.5387	40.5681	43.9027	47.5754	56.0849	66.4388	79.0582
31	36.1327	37.5807	39.1018	42.3794	46.0003	50.0027	59.3283	70.7608	84.8017
32	37.4941	39.0504	40.6883	44.2270	48.1503	52.5028	62.7015	75.2988	90.8898
33	38.8690	40.5386	42.2986	46.1116	50.3540	55.0778	66.2095	80.0638	97.3432
34	40.2577	42.0453	43.9331	48.0338	52.6129	57.7302	69.8579	85.0670	104.1838
35	41.6603	43.5709	45.5921	49.9945	54.9282	60.4621	73.6522	90.3203	111.4348
36	43.0769	45.1155	47.2760	51.9944	57.3014	63.2759	77.5983	95.8363	119.1209
37	44.5076	46.6794	48.9851	54.0343	59.7339	66.1742	81.7022	101.6281	127.2681
38	45.9527	48.2629	50.7199	56.1149	62.2273	69.1594	85.9703	107.7095	135.9042
39	47.4123	49.8662	52.4807	58.2372	64.7830	72.2342	90.4091	114.0950	145.0585
40	48.8864	51.4896	54.2679	60.4020	67.4026	75.4013	95.0255	120.7998	154.7620
41	50.3752	53.1332	56.0819	62.6100	70.0876	78.6633	99.8265	127.8398	165.0477
42	51.8790	54.7973	57.9231	64.8622	72.8398	82.0232	104.8196	135.2318	175.9505
43	53.3978	56.4823	59.7920	67.1595	75.6608	85.4839	110.0124	142.9933	187.5076
44	54.9318	58.1883	61.6889	69.5027	78.5523	89.0484	115.4129	151.1430	199.7580
45	56.4811	59.9157	63.6142	71.8927	81.5161	92.7199	121.0294	159.7002	212.7435
46	58.0459	61.6646	65.5684	74.3306	84.5540	96.5015	126.8706	168.6852	226.5081
47	59.6263	63.4354	67.5519	76.8172	87.6679	100.3965	132.9454	178.1194	241.0986
48	61.2226	65.2284	69.5652	79.3535	90.8596	104.4084	139.2632	188.0254	256.5645
49	62.8348	67.0437	71.6087	81.9406	94.1311	108.5406	145.8337	198.4267	272.9584
50	64.4632	68.8818	73.6828	84.5794	97.4843	112.7969	152.6671	209.3480	290.3359

35 VALOR PRESENTE DE UNA ANUALIDAD: $\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$

El valor presente de una anualidad en la cual el pago al final de cada uno de los n años es A, a una tasa de interés r (en decimales) compuesta anualmente es $A\left[\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}\right]$.

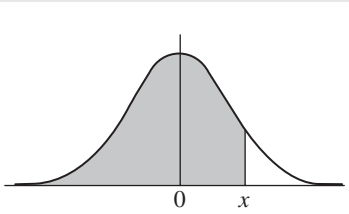
n \ r	1%	1¼%	1½%	2%	2½%	3%	4%	5%	6%
1	0.9901	0.9877	0.9852	0.9804	0.9756	0.9709	0.9615	0.9524	0.9434
2	1.9704	1.9631	1.9559	1.9416	1.9274	1.9135	1.8861	1.8594	1.8334
3	2.9410	2.9265	2.9122	2.8839	2.8560	2.8286	2.7751	2.7232	2.6730
4	3.9020	3.8781	3.8544	3.8077	3.7620	3.7171	3.6299	3.5460	3.4651
5	4.8534	4.8178	4.7826	4.7135	4.6458	4.5797	4.4518	4.3295	4.2124
6	5.7955	5.7460	5.6972	5.6014	5.5081	5.4172	5.2421	5.0757	4.9173
7	6.7282	6.6627	6.5982	6.4720	6.3494	6.2303	6.0021	5.7864	5.5824
8	7.6517	7.5681	7.4859	7.3255	7.1701	7.0197	6.7327	6.4632	6.2098
9	8.5660	8.4623	8.3605	8.1622	7.9709	7.7861	7.4353	7.1078	6.8017
10	9.4713	9.3455	9.2222	8.9826	8.7521	8.5302	8.1109	7.7217	7.3601
11	10.3676	10.2178	10.0711	9.7868	9.5142	9.2526	8.7605	8.3064	7.8869
12	11.2551	11.0793	10.9075	10.5753	10.2578	9.9540	9.3851	8.8633	8.3838
13	12.1337	11.9302	11.7315	11.3484	10.9832	10.6350	9.9856	9.3936	8.8527
14	13.0037	12.7706	12.5434	12.1062	11.6909	11.2961	10.5631	9.8986	9.2950
15	13.8651	13.6005	13.3432	12.8493	12.3814	11.9379	11.1184	10.3797	9.7122
16	14.7179	14.4203	14.1313	13.5777	13.0550	12.5611	11.6523	10.8378	10.1059
17	15.5623	15.2299	14.9076	14.2919	13.7122	13.1661	12.1657	11.2741	10.4773
18	16.3983	16.0295	15.6726	14.9920	14.3534	13.7535	12.6593	11.6896	10.8276
19	17.2260	16.8193	16.4262	15.6785	14.9789	14.3238	13.1339	12.0853	11.1581
20	18.0456	17.5993	17.1686	16.3514	15.5892	14.8775	13.5903	12.4622	11.4699
21	18.8570	18.3697	17.9001	17.0112	16.1845	15.4150	14.0292	12.8212	11.7641
22	19.6604	19.1306	18.6208	17.6580	16.7654	15.9369	14.4511	13.1630	12.0416
23	20.4558	19.8820	19.3309	18.2922	17.3321	16.4436	14.8568	13.4886	12.3034
24	21.2434	20.6242	20.0304	18.9139	17.8850	16.9355	15.2470	13.7986	12.5504
25	22.0232	21.3573	20.7196	19.5235	18.4244	17.4131	15.6221	14.0939	12.7834
26	22.7952	22.0813	21.3986	20.1210	18.9506	17.8768	15.9828	14.3752	13.0032
27	23.5596	22.7963	22.0676	20.7069	19.4640	18.3270	16.3296	14.6430	13.2105
28	24.3164	23.5025	22.7267	21.2813	19.9649	18.7641	16.6631	14.8981	13.4062
29	25.0658	24.2000	23.3761	21.8444	20.4535	19.1885	16.9837	15.1411	13.5907
30	25.8077	24.8889	24.0158	22.3965	20.9303	19.6004	17.2920	15.3725	13.7648
31	26.5423	25.5693	24.6461	22.9377	21.3954	20.0004	17.5885	15.5928	13.9291
32	27.2696	26.2413	25.2671	23.4683	21.8492	20.3888	17.8736	15.8027	14.0840
33	27.9897	26.9050	25.8790	23.9886	22.2919	20.7658	18.1476	16.0025	14.2302
34	28.7027	27.5605	26.4817	24.4986	22.7238	21.1318	18.4112	16.1929	14.3681
35	29.4086	28.2079	27.0756	24.9986	23.1452	21.4872	18.6646	16.3742	14.4982
36	30.1075	28.8473	27.6607	25.4888	23.5563	21.8323	18.9083	16.5469	14.6210
37	30.7995	29.4788	28.2371	25.9695	23.9573	22.1672	19.1426	16.7113	14.7368
38	31.4847	30.1025	28.8051	26.4406	24.3486	22.4925	19.3679	16.8679	14.8460
39	32.1630	30.7185	29.3646	26.9026	24.7303	22.8082	19.5845	17.0170	14.9491
40	32.8347	31.3269	29.9158	27.3555	25.1028	23.1148	19.7928	17.1591	15.0463
41	33.4997	31.9278	30.4590	27.7995	25.4661	23.4124	19.9931	17.2944	15.1380
42	34.1581	32.5213	30.9941	28.2348	25.8206	23.7014	20.1856	17.4232	15.2245
43	34.8100	33.1075	31.5212	28.6616	26.1664	23.9819	20.3708	17.5459	15.3062
44	35.4555	33.6864	32.0406	29.0800	26.5038	24.2543	20.5488	17.6628	15.3832
45	36.0945	34.2582	32.5523	29.4902	26.8330	24.5187	20.7200	17.7741	15.4558
46	36.7272	34.8229	33.0565	29.8923	27.1542	24.7754	20.8847	17.8801	15.5244
47	37.3537	35.3806	33.5532	30.2866	27.4675	25.0247	21.0429	17.9810	15.5890
48	37.9740	35.9315	34.0426	30.6731	27.7732	25.2667	21.1951	18.0772	15.6500
49	38.5881	36.4755	34.5247	31.0521	28.0714	25.5017	21.3415	18.1687	15.7076
50	39.1961	37.0129	34.9997	31.4236	28.3623	25.7298	21.4822	18.2559	15.7619

36

ÁREAS BAJO LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

de $-\infty$ a x

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt$$



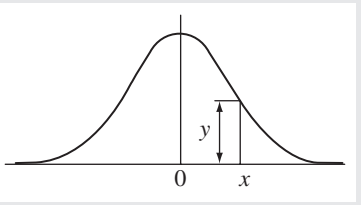
NOTA: $\operatorname{erf}(x) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5754
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7258	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7518	.7549
0.7	.7580	.7612	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7996	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.9772	.9778	.9783	.9788	.9793	.9798	.9803	.9808	.9812	.9817
2.1	.9821	.9826	.9830	.9834	.9838	.9842	.9846	.9850	.9854	.9857
2.2	.9861	.9864	.9868	.9871	.9875	.9878	.9881	.9884	.9887	.9890
2.3	.9893	.9896	.9898	.9901	.9904	.9906	.9909	.9911	.9913	.9916
2.4	.9918	.9920	.9922	.9925	.9927	.9929	.9931	.9932	.9934	.9936
2.5	.9938	.9940	.9941	.9943	.9945	.9946	.9948	.9949	.9951	.9952
2.6	.9953	.9955	.9956	.9957	.9959	.9960	.9961	.9962	.9963	.9964
2.7	.9965	.9966	.9967	.9968	.9969	.9970	.9971	.9972	.9973	.9974
2.8	.9974	.9975	.9976	.9977	.9977	.9978	.9979	.9979	.9980	.9981
2.9	.9981	.9982	.9982	.9983	.9984	.9984	.9985	.9985	.9986	.9986
3.0	.9987	.9987	.9987	.9988	.9988	.9989	.9989	.9989	.9990	.9990
3.1	.9990	.9991	.9991	.9991	.9992	.9992	.9992	.9992	.9993	.9993
3.2	.9993	.9993	.9994	.9994	.9994	.9994	.9994	.9995	.9995	.9995
3.3	.9995	.9995	.9995	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9996	.9997
3.4	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9997	.9998
3.5	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998	.9998
3.6	.9998	.9998	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.7	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.8	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999	.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

37

ORDENADAS DE LA CURVA NORMAL ESTÁNDAR

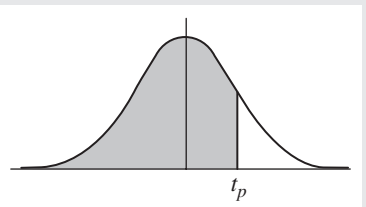
$$y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$



x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.3989	.3989	.3989	.3988	.3986	.3984	.3982	.3980	.3977	.3973
0.1	.3970	.3965	.3961	.3956	.3951	.3945	.3939	.3932	.3925	.3918
0.2	.3910	.3902	.3894	.3885	.3876	.3867	.3857	.3847	.3836	.3825
0.3	.3814	.3802	.3790	.3778	.3765	.3752	.3739	.3725	.3712	.3697
0.4	.3683	.3668	.3653	.3637	.3621	.3605	.3589	.3572	.3555	.3538
0.5	.3521	.3503	.3485	.3467	.3448	.3429	.3410	.3391	.3372	.3352
0.6	.3332	.3312	.3292	.3271	.3251	.3230	.3209	.3187	.3166	.3144
0.7	.3123	.3101	.3079	.3056	.3034	.3011	.2989	.2966	.2943	.2920
0.8	.2897	.2874	.2850	.2827	.2803	.2780	.2756	.2732	.2709	.2685
0.9	.2661	.2637	.2613	.2589	.2565	.2541	.2516	.2492	.2468	.2444
1.0	.2420	.2396	.2371	.2347	.2323	.2299	.2275	.2251	.2227	.2203
1.1	.2179	.2155	.2131	.2107	.2083	.2059	.2036	.2012	.1989	.1965
1.2	.1942	.1919	.1895	.1872	.1849	.1826	.1804	.1781	.1758	.1736
1.3	.1714	.1691	.1669	.1647	.1626	.1604	.1582	.1561	.1539	.1518
1.4	.1497	.1476	.1456	.1435	.1415	.1394	.1374	.1354	.1334	.1315
1.5	.1295	.1276	.1257	.1238	.1219	.1200	.1182	.1163	.1145	.1127
1.6	.1109	.1092	.1074	.1057	.1040	.1023	.1006	.0989	.0973	.0957
1.7	.0940	.0925	.0909	.0893	.0878	.0863	.0848	.0833	.0818	.0804
1.8	.0790	.0775	.0761	.0748	.0734	.0721	.0707	.0694	.0681	.0669
1.9	.0656	.0644	.0632	.0620	.0608	.0596	.0584	.0573	.0562	.0551
2.0	.0540	.0529	.0519	.0508	.0498	.0488	.0478	.0468	.0459	.0449
2.1	.0440	.0431	.0422	.0413	.0404	.0396	.0387	.0379	.0371	.0363
2.2	.0355	.0347	.0339	.0332	.0325	.0317	.0310	.0303	.0297	.0290
2.3	.0283	.0277	.0270	.0264	.0258	.0252	.0246	.0241	.0235	.0229
2.4	.0224	.0219	.0213	.0208	.0203	.0198	.0194	.0189	.0184	.0180
2.5	.0175	.0171	.0167	.0163	.0158	.0154	.0151	.0147	.0143	.0139
2.6	.0136	.0132	.0129	.0126	.0122	.0119	.0116	.0113	.0110	.0107
2.7	.0104	.0101	.0099	.0096	.0093	.0091	.0088	.0086	.0084	.0081
2.8	.0079	.0077	.0075	.0073	.0071	.0069	.0067	.0065	.0063	.0061
2.9	.0060	.0058	.0056	.0055	.0053	.0051	.0050	.0048	.0047	.0046
3.0	.0044	.0043	.0042	.0040	.0039	.0038	.0037	.0036	.0035	.0034
3.1	.0033	.0032	.0031	.0030	.0029	.0028	.0027	.0026	.0025	.0025
3.2	.0024	.0023	.0022	.0022	.0021	.0020	.0020	.0019	.0018	.0018
3.3	.0017	.0017	.0016	.0016	.0015	.0015	.0014	.0014	.0013	.0013
3.4	.0012	.0012	.0012	.0011	.0011	.0010	.0010	.0010	.0009	.0009
3.5	.0009	.0008	.0008	.0008	.0008	.0007	.0007	.0007	.0007	.0006
3.6	.0006	.0006	.0006	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0005	.0004
3.7	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0004	.0003	.0003	.0003	.0003
3.8	.0003	.0003	.0003	.0003	.0003	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002
3.9	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0002	.0001	.0001

38 VALORES PERCENTILES (t_p) PARA LA DISTRIBUCIÓN *t* DE STUDENT

con n grados de libertad (área sombreada = p)

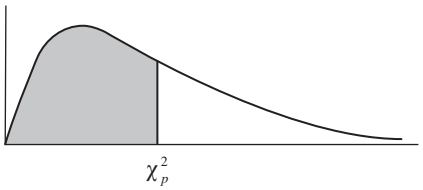


n	$t_{.995}$	$t_{.99}$	$t_{.975}$	$t_{.95}$	$t_{.90}$	$t_{.80}$	$t_{.75}$	$t_{.70}$	$t_{.60}$	$t_{.55}$
1	63.66	31.82	12.71	6.31	3.08	1.376	1.000	.727	.325	.158
2	9.92	6.96	4.30	2.92	1.89	1.061	.816	.617	.289	.142
3	5.84	4.54	3.18	2.35	1.64	.978	.765	.584	.277	.137
4	4.60	3.75	2.78	2.13	1.53	.941	.741	.569	.271	.134
5	4.03	3.36	2.57	2.02	1.48	.920	.727	.559	.267	.132
6	3.71	3.14	2.45	1.94	1.44	.906	.718	.553	.265	.131
7	3.50	3.00	2.36	1.90	1.42	.896	.711	.549	.263	.130
8	3.36	2.90	2.31	1.86	1.40	.889	.706	.546	.262	.130
9	3.25	2.82	2.26	1.83	1.38	.883	.703	.543	.261	.129
10	3.17	2.76	2.23	1.81	1.37	.879	.700	.542	.260	.129
11	3.11	2.72	2.20	1.80	1.36	.876	.697	.540	.260	.129
12	3.06	2.68	2.18	1.78	1.36	.873	.695	.539	.259	.128
13	3.01	2.65	2.16	1.77	1.35	.870	.694	.538	.259	.128
14	2.98	2.62	2.14	1.76	1.34	.868	.692	.537	.258	.128
15	2.95	2.60	2.13	1.75	1.34	.866	.691	.536	.258	.128
16	2.92	2.58	2.12	1.75	1.34	.865	.690	.535	.258	.128
17	2.90	2.57	2.11	1.74	1.33	.863	.689	.534	.257	.128
18	2.88	2.55	2.10	1.73	1.33	.862	.688	.534	.257	.127
19	2.86	2.54	2.09	1.73	1.33	.861	.688	.533	.257	.127
20	2.84	2.53	2.09	1.72	1.32	.860	.687	.533	.257	.127
21	2.83	2.52	2.08	1.72	1.32	.859	.686	.532	.257	.127
22	2.82	2.51	2.07	1.72	1.32	.858	.686	.532	.256	.127
23	2.81	2.50	2.07	1.71	1.32	.858	.685	.532	.256	.127
24	2.80	2.49	2.06	1.71	1.32	.857	.685	.531	.256	.127
25	2.79	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
26	2.78	2.48	2.06	1.71	1.32	.856	.684	.531	.256	.127
27	2.77	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.684	.531	.256	.127
28	2.76	2.47	2.05	1.70	1.31	.855	.683	.530	.256	.127
29	2.76	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
30	2.75	2.46	2.04	1.70	1.31	.854	.683	.530	.256	.127
40	2.70	2.42	2.02	1.68	1.30	.851	.681	.529	.255	.126
60	2.66	2.39	2.00	1.67	1.30	.848	.679	.527	.254	.126
120	2.62	2.36	1.98	1.66	1.29	.845	.677	.526	.254	.126
∞	2.58	2.33	1.96	1.645	1.28	.842	.674	.524	.253	.126

***Fuente*: R. A. Fisher y F. Yates, *Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research* (sexta edición, 1963), tabla III, Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, con permiso de los autores y editores.**

39 VALORES PERCENTILES (χ^2_p) PARA LA DISTRIBUCIÓN χ^2 (CHI CUADRADA)

con n grados de libertad (área sombreada = p)



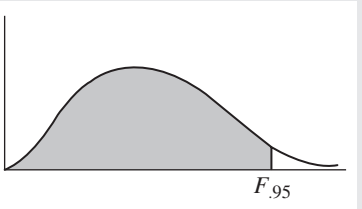
n	$\chi^2_{.995}$	$\chi^2_{.99}$	$\chi^2_{.975}$	$\chi^2_{.95}$	$\chi^2_{.90}$	$\chi^2_{.75}$	$\chi^2_{.50}$	$\chi^2_{.25}$	$\chi^2_{.10}$	$\chi^2_{.05}$	$\chi^2_{.025}$	$\chi^2_{.01}$	$\chi^2_{.005}$
1	7.88	6.63	5.02	3.84	2.71	1.32	.455	.102	.0158	.0039	.0010	.0002	.0000
2	10.6	9.21	7.38	5.99	4.61	2.77	1.39	.575	.211	.103	.0506	.0201	.0100
3	12.8	11.3	9.35	7.81	6.25	4.11	2.37	1.21	.584	.352	.216	.115	.072
4	14.9	13.3	11.1	9.49	7.78	5.39	3.36	1.92	1.06	.711	.484	.297	.207
5	16.7	15.1	12.8	11.1	9.24	6.63	4.35	2.67	1.61	1.15	.831	.554	.412
6	18.5	16.8	14.4	12.6	10.6	7.84	5.35	3.45	2.20	1.64	1.24	.872	.676
7	20.3	18.5	16.0	14.1	12.0	9.04	6.35	4.25	2.83	2.17	1.69	1.24	.989
8	22.0	20.1	17.5	15.5	13.4	10.2	7.34	5.07	3.49	2.73	2.18	1.65	1.34
9	23.6	21.7	19.0	16.9	14.7	11.4	8.34	5.90	4.17	3.33	2.70	2.09	1.73
10	25.2	23.2	20.5	18.3	16.0	12.5	9.34	6.74	4.87	3.94	3.25	2.56	2.16
11	26.8	24.7	21.9	19.7	17.3	13.7	10.3	7.58	5.58	4.57	3.82	3.05	2.60
12	28.3	26.2	23.3	21.0	18.5	14.8	11.3	8.44	6.30	5.23	4.40	3.57	3.07
13	29.8	27.7	24.7	22.4	19.8	16.0	12.3	9.30	7.04	5.89	5.01	4.11	3.57
14	31.3	29.1	26.1	23.7	21.1	17.1	13.3	10.2	7.79	6.57	5.63	4.66	4.07
15	32.8	30.6	27.5	25.0	22.3	18.2	14.3	11.0	8.55	7.26	6.26	5.23	4.60
16	34.3	32.0	28.8	26.3	23.5	19.4	15.3	11.9	9.31	7.96	6.91	5.81	5.14
17	35.7	33.4	30.2	27.6	24.8	20.5	16.3	12.8	10.1	8.67	7.56	6.41	5.70
18	37.2	34.8	31.5	28.9	26.0	21.6	17.3	13.7	10.9	9.39	8.23	7.01	6.26
19	38.6	36.2	32.9	30.1	27.2	22.7	18.3	14.6	11.7	10.1	8.91	7.63	6.84
20	40.0	37.6	34.2	31.4	28.4	23.8	19.3	15.5	12.4	10.9	9.59	8.26	7.43
21	41.4	38.9	35.5	32.7	29.6	24.9	20.3	16.3	13.2	11.6	10.3	8.90	8.03
22	42.8	40.3	36.8	33.9	30.8	26.0	21.3	17.2	14.0	12.3	11.0	9.54	8.64
23	44.2	41.6	38.1	35.2	32.0	27.1	22.3	18.1	14.8	13.1	11.7	10.2	9.26
24	45.6	43.0	39.4	36.4	33.2	28.2	23.3	19.0	15.7	13.8	12.4	10.9	9.89
25	46.9	44.3	40.6	37.7	34.4	29.3	24.3	19.9	16.5	14.6	13.1	11.5	10.5
26	48.3	45.6	41.9	38.9	35.6	30.4	25.3	20.8	17.3	15.4	13.8	12.2	11.2
27	49.6	47.0	43.2	40.1	36.7	31.5	26.3	21.7	18.1	16.2	14.6	12.9	11.8
28	51.0	48.3	44.5	41.3	37.9	32.6	27.3	22.7	18.9	16.9	15.3	13.6	12.5
29	52.3	49.6	45.7	42.6	39.1	33.7	28.3	23.6	19.8	17.7	16.0	14.3	13.1
30	53.7	50.9	47.0	43.8	40.3	34.8	29.3	24.5	20.6	18.5	16.8	15.0	13.8
40	66.8	63.7	59.3	55.8	51.8	45.6	39.3	33.7	29.1	26.5	24.4	22.2	20.7
50	79.5	76.2	71.4	67.5	63.2	56.3	49.3	42.9	37.7	34.8	32.4	29.7	28.0
60	92.0	88.4	83.3	79.1	74.4	67.0	59.3	52.3	46.5	43.2	40.5	37.5	35.5
70	104.2	100.4	95.0	90.5	85.5	77.6	69.3	61.7	55.3	51.7	48.8	45.4	43.3
80	116.3	112.3	106.6	101.9	96.6	88.1	79.3	71.1	64.3	60.4	57.2	53.5	51.2
90	128.3	124.1	118.1	113.1	107.6	98.6	89.3	80.6	73.3	69.1	65.6	61.8	59.2
100	140.2	135.8	129.6	124.3	118.5	109.1	99.3	90.1	82.4	77.9	74.2	70.1	67.3

Fuente: **Catherine M. Thompson, *Table of percentage points of the χ^2 distribution*, Biometrika, Vol. 32 (1941), con permiso del autor y editor.**

40

VALORES PERCENTILES DE 95% PARA LA DISTRIBUCIÓN *F*

n_1 = grados de libertad del numerador
n_2 = grados de libertad del denominador
(área sombreada = .95)

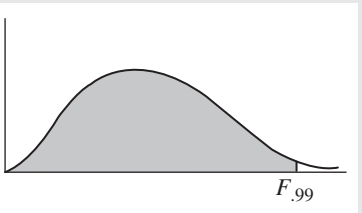


n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	40	50	100	∞
1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	238.9	243.9	246.3	248.0	250.1	251.1	252.2	253.0	254.3
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.37	19.41	19.43	19.45	19.46	19.46	19.47	19.49	19.50
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.85	8.74	8.69	8.66	8.62	8.60	8.58	8.56	8.53
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.04	5.91	5.84	5.80	5.75	5.71	5.70	5.66	5.63
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.82	4.68	4.60	4.56	4.50	4.46	4.44	4.40	4.36
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.15	4.00	3.92	3.87	3.81	3.77	3.75	3.71	3.67
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.73	3.57	3.49	3.44	3.38	3.34	3.32	3.28	3.23
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.44	3.28	3.20	3.15	3.08	3.05	3.03	2.98	2.93
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.23	3.07	2.98	2.93	2.86	2.82	2.80	2.76	2.71
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.07	2.91	2.82	2.77	2.70	2.67	2.64	2.59	2.54
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	2.95	2.79	2.70	2.65	2.57	2.53	2.50	2.45	2.40
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.85	2.69	2.60	2.54	2.46	2.42	2.40	2.35	2.30
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.77	2.60	2.51	2.46	2.38	2.34	2.32	2.26	2.21
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.70	2.53	2.44	2.39	2.31	2.27	2.24	2.19	2.13
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.64	2.48	2.39	2.33	2.25	2.21	2.18	2.12	2.07
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.59	2.42	2.33	2.28	2.20	2.16	2.13	2.07	2.01
17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.55	2.38	2.29	2.23	2.15	2.11	2.08	2.02	1.96
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.51	2.34	2.25	2.19	2.11	2.07	2.04	1.98	1.92
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.48	2.31	2.21	2.15	2.07	2.02	2.00	1.94	1.88
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.45	2.28	2.18	2.12	2.04	1.99	1.96	1.90	1.84
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.40	2.23	2.13	2.07	1.98	1.93	1.91	1.84	1.78
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.36	2.18	2.09	2.03	1.94	1.89	1.86	1.80	1.73
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.32	2.15	2.05	1.99	1.90	1.85	1.82	1.76	1.69
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.29	2.12	2.02	1.96	1.87	1.81	1.78	1.72	1.65
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.27	2.09	1.99	1.93	1.84	1.79	1.76	1.69	1.62
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.18	2.00	1.90	1.84	1.74	1.69	1.66	1.59	1.51
50	4.03	3.18	2.79	2.56	2.40	2.29	2.13	1.95	1.85	1.78	1.69	1.63	1.60	1.52	1.44
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.10	1.92	1.81	1.75	1.65	1.59	1.56	1.48	1.39
70	3.98	3.13	2.74	2.50	2.35	2.23	2.07	1.89	1.79	1.72	1.62	1.56	1.53	1.45	1.35
80	3.96	3.11	2.72	2.48	2.33	2.21	2.05	1.88	1.77	1.70	1.60	1.54	1.51	1.42	1.32
100	3.94	3.09	2.70	2.46	2.30	2.19	2.03	1.85	1.75	1.68	1.57	1.51	1.48	1.39	1.28
150	3.91	3.06	2.67	2.43	2.27	2.16	2.00	1.82	1.71	1.64	1.54	1.47	1.44	1.34	1.22
200	3.89	3.04	2.65	2.41	2.26	2.14	1.98	1.80	1.69	1.62	1.52	1.45	1.42	1.32	1.19
400	3.86	3.02	2.62	2.39	2.23	2.12	1.96	1.78	1.67	1.60	1.49	1.42	1.38	1.28	1.13
∞	3.84	2.99	2.60	2.37	2.21	2.09	1.94	1.75	1.64	1.57	1.46	1.40	1.32	1.24	1.00

***Fuente*: G.W. Snedecor y W.G. Cochran, *Statistical Methods* (sexta edición, 1967), Iowa State University Press, Ames, Iowa, con permiso de los autores y editores.**

41 VALORES PERCENTILES DE 99% PARA LA DISTRIBUCIÓN *F*

n_1 = grados de libertad del numerador
n_2 = grados de libertad del denominador
(área sombreada = .99)



n_2 \ n_1	1	2	3	4	5	6	8	12	16	20	30	40	50	100	∞
1	4 052	4 999	5 403	5 625	5 764	5 859	5 981	6 106	6 169	6 208	6 258	6 286	6 302	6 334	6 366
2	98.49	99.01	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.42	99.44	99.45	99.47	99.48	99.48	99.49	99.50
3	34.12	30.81	29.46	28.71	28.24	27.41	27.49	27.05	28.63	26.69	26.50	26.41	26.35	26.23	26.12
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.80	14.37	14.15	14.02	13.83	13.74	13.69	13.57	13.46
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.27	9.89	9.68	9.55	9.38	9.29	9.24	9.13	9.02
6	13.74	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.10	7.72	7.52	7.39	7.23	7.14	7.09	6.99	6.88
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.84	6.47	6.27	6.15	5.98	5.90	5.85	5.75	5.65
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.03	5.67	5.48	5.36	5.20	5.11	5.06	4.96	4.86
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.47	5.11	4.92	4.80	4.64	4.56	4.51	4.41	4.31
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.06	4.71	4.52	4.41	4.25	4.17	4.12	4.01	3.91
11	9.05	7.20	6.22	5.67	5.32	5.07	4.74	4.40	4.21	4.10	3.94	3.86	3.80	3.70	3.60
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.50	4.16	3.98	3.86	3.70	3.61	3.56	3.46	3.36
13	9.07	6.70	5.74	5.20	4.86	4.62	4.30	3.96	3.78	3.67	3.51	3.42	3.37	3.27	3.16
14	8.86	6.51	5.56	5.03	4.69	4.46	4.14	3.80	3.62	3.51	3.34	3.26	3.21	3.11	3.00
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.00	3.67	3.48	3.36	3.20	3.12	3.07	2.97	2.87
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	3.89	3.55	3.37	3.25	3.10	3.01	2.96	2.86	2.75
17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.79	3.45	3.27	3.16	3.00	2.92	2.86	2.76	2.65
18	8.28	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.71	3.37	3.19	3.07	2.91	2.83	2.78	2.68	2.57
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.63	3.30	3.12	3.00	2.84	2.76	2.70	2.60	2.49
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.56	3.23	3.05	2.94	2.77	2.69	2.63	2.53	2.42
22	7.94	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.45	3.12	2.94	2.83	2.67	2.58	2.53	2.42	2.31
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.36	3.03	2.85	2.74	2.58	2.49	2.44	2.33	2.21
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.29	2.96	2.77	2.66	2.50	2.41	2.36	2.25	2.13
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.76	3.53	3.23	2.90	2.71	2.60	2.44	2.35	2.30	2.18	2.06
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.17	2.84	2.66	2.55	2.38	2.29	2.24	2.13	2.01
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	2.99	2.66	2.49	2.37	2.20	2.11	2.05	1.94	1.81
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.18	2.88	2.56	2.39	2.26	2.10	2.00	1.94	1.82	1.68
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.82	2.50	2.32	2.20	2.03	1.93	1.87	1.74	1.60
70	7.01	4.92	4.08	3.60	3.29	3.07	2.77	2.45	2.28	2.15	1.98	1.88	1.82	1.69	1.53
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.25	3.04	2.74	2.41	2.24	2.11	1.94	1.84	1.78	1.65	1.49
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.20	2.99	2.69	2.36	2.19	2.06	1.89	1.79	1.73	1.59	1.43
150	6.81	4.75	3.91	3.44	3.14	2.92	2.62	2.30	2.12	2.00	1.83	1.72	1.66	1.51	1.33
200	6.76	4.71	3.88	3.41	3.11	2.90	2.60	2.28	2.09	1.97	1.79	1.69	1.62	1.48	1.28
400	6.70	4.66	3.83	3.36	3.06	2.85	2.55	2.23	2.04	1.92	1.74	1.64	1.57	1.42	1.19
∞	6.64	4.60	3.78	3.32	3.02	2.80	2.51	2.18	1.99	1.87	1.69	1.59	1.52	1.36	1.00

***Fuente*: G.W. Snedecor y W.G. Cochran, *Statistical Methods* (sexta edición, 1967), Iowa State University Press, Ames, Iowa, con permiso de los autores y editores.**

42 NÚMEROS ALEATORIOS

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65253	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21631	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	73547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75936
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
85184	73949	36601	46253	00477	25234	09908	36574	72139	70185
54398	21154	97810	36764	32869	11785	55261	59009	38714	38723
65544	34371	09591	07839	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05825
53298	90276	62545	21944	16530	03878	07516	95715	02526	33537

Índice de símbolos especiales y notaciones

La siguiente lista muestra los símbolos especiales y notaciones junto con la página en la cual son definidos o aparecen por primera vez. Los casos en los que un símbolo tiene más de un significado quedarán aclarados por el contexto.

Símbolos

$\mathrm{Ber}_n(x)$, $\mathrm{Bei}_n(x)$	funciones Ber y Bei, 157
$B(m, n)$	función beta, 152
B_b	números de Bernoulli, 142
$C(x)$	integral cosenoidal de Fresnel, 204
$\mathrm{C}_i(x)$	integral cosenoidal, 204
e_1, e_2, e_3	vectores unitarios en coordenadas curvilíneas, 127
$\mathrm{erf}(x)$	función error, 203
$\mathrm{erfc}(x)$	función error complementaria, 203
$E = E(k, \pi/2)$	integral elíptica completa de segundo tipo, 198
$E = E(k, \phi)$	integral elíptica incompleta de segundo tipo, 198
$\mathrm{Ei}(x)$	integral exponencial, 203
E_n	número de Euler, 142
$E(X)$	media o esperanza de X, 223
$f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$	fórmula con diferencias divididas, 231, 232
$F(a)$, $F(x)$	función de distribución acumulada, 225
$F(a, b; c; x)$	función hipergeométrica, 178
$F(k, \phi)$	función elíptica incompleta de primer tipo, 198
$\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{-1}$	transformada de Fourier y transformada inversa de Fourier, 194
G. M.	media geométrica, 209
h_1, h_2, h_3	factores de escala en coordenadas curvilíneas, 127
$H_n(x)$	polinomio de Hermite, 169
$H_n^{(1)}(x)$, $H_n^{(2)}(x)$	funciones de Hankel de primera y segunda especie, 155
H. M.	media armónica, 210
i, j, k	vectores unitarios en coordenadas rectangulares, 120
$I_n(x)$	funciones de Bessel modificadas de primera especie, 155
$J_n(x)$	funciones de Bessel de primera especie, 153
$K = F(k, \pi/2)$	integrales elípticas completas de primera especie, 198
$\mathrm{Ker}_n(x)$, $\mathrm{Kei}_n(x)$	funciones Ker y Kei, 158
$K_n(x)$	funciones de Bessel modificadas de segunda especie, 156
$\ln x$ o $\log_e x$	logaritmo natural de x, 53
$\log x$ o $\log_{10} x$	logaritmo común de x, 53
$L_n(x)$	polinomios de Laguerre, 171
$L_n^m(x)$	polinomios asociados de Laguerre,173
$\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{-1}$	transformada de Laplace y transformada inversa de Laplace,180
M.D.	desviación media, 211
$P(A/E)$	probabilidad condicional de A dado E, 219
$P_n(x)$	polinomios de Legendre, 164
$P_n^m(x)$	polinomios asociados de Legendre, 167
Q_U, M, Q_L	cuartiles, 211
$Q_n(x)$	funciones de Legendre de segundo tipo, 167
$Q_n^m(x)$	funciones asociadas de Legendre de segunda especie, 168
r	coeficiente de correlación de la muestra, 213
R.M.S.	raíz de la media cuadrática, 211
s	desviación estándar de la muestra, 208
s^2	varianza de la muestra, 210
s_{xy}	covarianza de la muestra, 213
$\mathrm{Si}(x)$	integral senoidal, 203
$S(x)$	integral senoidal de Fresnel, 204
$T_n(x)$	polinomios de Chebyshev de primera especie, 175

$U_n(x)$ polinomios de Chebyshev de segunda especie, 176
$\text{Var}(X)$ varianza de la variable aleatoria X, 224
$\bar{x}$, $\bar{\bar{x}}$ media muestral, gran media, 208, 209
$x_k^{(n)}$ k-ésima cero del polinomio de Legendre $P_n(x)$, 232
$Y_n(x)$ función de Bessel de segunda especie, 153
Z variable aleatoria estandarizada, 227

Símbolos griegos

α_r r-ésimo momento unidades estándar, 212
γ constante de Euler, 3
$\Gamma(x)$ función gamma, 149
$\zeta(x)$ función zeta de Riemann, 204
μ media poblacional, 208
θ coordenadas: cilíndricas 37; polar, 11, 24; esféricas, 37
π pi, 3
ϕ coordenadas esféricas, 37
$\Phi(p)$ suma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{p}, \Phi(0)=0$, 154
$\Phi(x)$ distribución de Poisson, 229
σ desviación estándar poblacional, 223
σ^2 varianza poblacional, 223

Notaciones

$A \sim B$ A es asintótica a B o A/B se acerca a 1, 151
$|A|$ valor absoluto de $A = \begin{cases} A \text{ si } A \geq 0 \\ -A \text{ si } A < 0 \end{cases}$
$n!$ factorial de n, 7
$\binom{n}{k}$ coeficientes binomiales, 8
$y' = \frac{dy}{dx} = f'(x)$, $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = f''(x)$, etc. derivadas de y o $f(x)$ con respecto a x, 64
$D^p = \frac{d^p}{dx^p}$ p-ésima derivada con respecto a x, 65
$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, etc. derivadas parciales, 66
$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}$ Jacobiano, 128
$\int f(x)dx$ integral indefinida, 67
$\int_a^b f(x)dx$ integral definida, 108
$\int_C \mathbf{A} \bullet dr$ integral de línea de $\mathbf{A}$ a lo largo de C, 124
$\mathbf{A} \bullet \mathbf{B}$ producto punto de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, 120
$\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ producto cruz de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$, 121
∇ operador del, 122
$\nabla^2 = \nabla \bullet \nabla$ operador laplaciano, 123
$\nabla^4 = \nabla^2(\nabla^2)$ operador biarmónico, 123

Índice analítico

A

Ajuste de curvas, 215
Amplitud de z, 11
Antiderivada, 67
Antilogaritmo(s)
  comunes, 53
  de p en la base a, 53
  naturales, 53
Anualidad, 294
Aproximación
  de Simpson, 109
  por parábolas, 109
  por rectángulos, 109
  por trapecios, 109
Arbitraje, 257
Árbol de probabilidad, 219
Área
  de un polígono regular, 17
  de una elipse, 18
  del círculo, 17
  del paralelogramo, 16
  del rectángulo, 16
  del trapezoide, 16
  del triángulo, 16
Área de la superficie lateral de un
  cilindro recto, 19
  cono circular recto, 20
Aritmética de los números complejos, 10
Asimetría de momentos, 212

B

Base natural de logaritmos, 3

C

Cambio de base de un logaritmo, 54
Campo, 217
Cantidades escalares, 119
Caracol de Pascal, 29, 32
Cardioide, 29, 30, 32
Caso especial
  de la epiciloide, 30
  del caracol de Pascal, 29
Catenaria, 29
Cicloide, 28
  acortada, 30
  alargada, 30
Cilindro elíptico, 39
Cisoide de Diocles, 33
Coeficiente(s)
  binomial(es), 7, 226
    propiedades de los, 8
  de asimetría, 212
    por cuartiles, 212
  de correlación muestral, 213
  de curtosis, 212
  de exceso de curtosis, 21
  de Fourier, 144
  de ponderación de Gauss-Legendre, 236
  multinomial, 9
Colección de conjuntos de Borel, 217
Complejo conjugado de z, 10
Componentes de un vector, 120
Conjunto
  de direcciones, 246
  de funciones, 49
  lím A_n, 218
Conjunto finito de
  estados, 246
  símbolos de cinta, 246
Cono elíptico, 39
Constante(s)
  de Catalán, 200
  de Euler, 3, 112, 150, 154
  notables, 3
Convergencia cuadrática, 237
Convolución de f y g, 194
Coordenadas
  cilíndricas, 37
  curvilíneas, 127
  esféricas, 37
  polares, 11, 24
Covarianza muestral, 213
Cuadrantes del plano, 43
Cuadratura de Gauss, 236
Cuartil(es), 211
  inferior, 211
  medio, 211
  superior, 211
Curva
  cónica, 25
  de Agnesi, 31
  de mejor ajuste, 215
  de mínimos cuadrados, 215
  exponencial, 215

D

Datos bivariados, 212
Definición de
  derivada, 62
  la función beta, 152
  la función gamma, 149
  la integral definida, 108
  la integral indefinida, 67
  las funciones hiperbólicas, 56
  las series de Fourier, 144
Definición de la transformada
  de Laplace, 180
  inversa de Laplace, 180
Definición de los números de
  Bernoulli, 142
  Euler, 142
Definición formal de una máquina de Turing, 248

Derivada
de *y*, 62
parcial de *z*, 66
Derivadas de
orden superior, 64
vectores, 122
Descripción instantánea inicial, 250
Desigualdad
de Cauchy-Schwarz, 205, 206
de Chebyshev, 206
de Holder, 205
de Minkowsky, 206
del triángulo, 205
Desviación estándar, 224
muestral, 208, 210
poblacional, 208, 212
Desviación media (MD), 211
Diagrama de
árbol, 219
Argand, 11
dispersión, 212
Diferenciación, 62
Diferencial(es) de
varias variables, 66
y, 65
Directriz, 25
Discriminante, 13
Distribución
binomial, 226
de probabilidad, 223
F, 230
hipergeométrica, 229
normal estandarizada, 227
Poisson, 229
t de Student, 230
χ^2 (chi cuadrada), 230
Divergencia, 122
División de números complejos, 10
Duplicación del cubo, 33

E

Ecuación(es)
asociadas de Legendre, 167
cuadrática, 7, 13
cuártica, 14
cúbica, 13
de Bernoulli, 116
de Bessel, 118
de calor, 241
de Cauchy, 118
de Chebyshev, 175
de Euler, 118
de Hermite, 169
de la esfera, 38
de Laguerre, 171
de Legendre, 118
de onda, 242
de Poisson, 241
del elipsoide, 38
exacta, 116
general de una recta, 23
general de un plano, 35
hipergeométrica, 178
homogénea, 116
no lineal, 237
de punto fijo, 237
Ecuación diferencial de
Bessel, 153
modificada, 155
Legendre, 164
Elipse(s), 25, 26, 130
Entero, 250
no negativo, 250
Entrada de una máquina de Turing, 250
Epicicloide, 30
Error cuadrático, 214
Espacio
de probabilidad, 218
muestral, 217
Esperanza de *X*, 223
Espiral de Arquímedes, 33
Esquema de inversión de ganancia segura, 257
Estadísticos, 208
de orden superior, 212
Estrategia de arbitraje de cobertura delta, 261
Evento
imposible, 217
seguro, 217
Evoluta de una elipse, 32
Excentricidad, 25
Expansiones asintóticas, 161
de la función gamma, 151
Experimento binomial, 226
Exponente, 53
Expresión, 246
de cinta, 246
Extensión de la función beta, 152

F

Factores de escala, 127
Factorial de
cero, 7
n, 7
Foco, 25
Folio de Descartes, 31
Forma
de escribir un número complejo, 10
normal de la ecuación de una recta, 23
Formato polar del número complejo, 11
Fórmula(s)
asintótica para números de Bernoulli, 143
binomial, 5, 7
Black-Scholes, 259
de adición los polinomios de Hermite, 170
de Bayes, 220
de Cauchy, 138
de dos puntos, 231
de duplicación, 150
de Euler-Maclaurin, 137
de Gauss-Legendre, 236
de la suma de Poisson, 137
de Lagrange, 138
de las abscisas y los coeficientes de ponderación, 236
de paridad *put-call*, 257

de Rodrigues, 164, 169, 171
de Stirling, 151
del residuo, 231, 232, 236
generalizada para la integración por partes, 69
multinomial, 9
Fórmulas de adición de las funciones
de Bessel, 163
trigonométricas, 47
Fórmulas de ángulo
doble, 48, 57
medio, 48, 57
múltiple, 48, 57
Fórmulas de cociente de diferencias de
primer orden, 231
segundo orden, 232
Fórmulas de diferencias
de Newton, 232
regresivas de Newton, 233
Fórmulas de interpolación de
dos puntos, 231
tres puntos, 232
Frecuencia acumulada, 209
Función
beta, 152
de densidad de X, 224
de distribución acumulada, 225
de error, 203
complementaria, 203
de frecuencia acumulada F_s, 209
de impulso unitario, 192
de Legendre de segundo tipo de orden n, 167
de masa de probabilidad de X, 223
de Neumann, 153
de onda diente de sierra, 191
de potencia, 216
de probabilidad, 218
de Weber, 153
delta, 189
escalón, 192
exponencial, 53
gamma, 4
como un producto infinito, 150
impar, 193
logarítmica, 53
nula, 189
par, 193
parcial, 248
polinomial de grado m, 215
unitaria de Heaviside, 192
zeta de Riemann, 204
Función de onda senoidal
rectificada, 191
semirrectificada, 191
Funciones
Bei, 157
Ber, 157
computables, 250
conjunto de, 49
de ángulos negativos, 46
de argumentos negativos, 56
de Bessel de orden n, 153
de Hankel, 155
elípticas de Jacobi, 199
hiperbólicas inversas, 59
Kei, 158
Ker, 158
modificadas de Bessel de orden n, 155
Funciones de Legendre de
orden n, 164
segundo tipo, 168
Funciones trigonométricas
de un triángulo rectángulo, 43
inversas, 49

G

Gradiente, 122, 128
Gráfica de la función gamma, 149
Gran media, 209

H

Hipérbola(s), 25, 26
homofocales, 130
Hiperboloide de
dos hojas, 39
una hoja, 39
Hipocicloide
de cuatro cúspides, 28
general, 30

I

Identidad de Parseval, 144, 194
Igualdad de vectores, 119
Integración, 67
por partes, 67
Integral
cosenoidal, 204
de Fresnel, 204
de Frullani, 115
de línea de un vector, 124
definida, 124
exponencial, 203
impropia, 108
indefinida, 67, 124
senoidal, 203
de Fresnel, 204
Integral elíptica
completa, 198
incompleta, 198
Integrales
de área, 125
de volumen, 125
definidas, 109
dobles, 125
múltiples, 125
triples, 125
Interpolación de
Hermite, 233
Lagrange, 231
Newton, 231
Intersección y, 22
Intervalo de convergencia, 138
Involuta de una circunferencia, 31

J

Jacobiano de la transformación, 128

K
k-ésimo percentil, 211

L
Laplaciano, 123, 129
Lema de Borel-Cantelli, 219
Lemniscata, 28, 32
Ley
  de DeMorgan, 217
  de las tangentes, 51
  de los cosenos, 51
  de los senos, 51
  de probabilidad total, 220
  del precio único, 257
Leyes
  de los exponentes, 53
  de los logaritmos, 53
  del álgebra de conjuntos, 217
  del álgebra vectorial, 120
Línea real, 11
Logaritmo(s)
  base *e*, 62
  briggsianos, 53
  comunes, 53
  de Briggsian, 53
  de *N* en la base *a*, 53
  de Napier, 53
  de un número complejo, 55
  natural de *u*, 62, 67, 71
  naturales, 53
  Neperianos, 53

M
Magnitud del vector, 119
Mapeo de contracción, 238
Máquina de Turing, 246, 247, 248
  con entradas. 250
Media, 223, 224
  aritmética, 205, 208
  armónica (HM), 205, 209, 210
  cuadrática (RMS), 211
  de medias, 209
  geométrica (GM), 205, 209
  muestral, 208, 210
  poblacional, 208, 210
  ponderada, 209
Mediana de los datos, 208, 209
Medidas de
  asimetría, 212
  curtosis, 212
  dispersión de los datos, 210
  posición, 211
Método
  de bisección, 237
  de Crank-Nicholson incondicionalmente estable, 242
  de Euler, 239
    con condición de estabilidad, 242
  de Gauss-Seidel, 244, 245
  de Heun, 239
  de Jacobi, 244, 245
  de la secante, 238
  de Milne, 240
  de Newton, 237
  de Richard, 245
  de Runge-Kutta de cuarto orden, 240
  de sobrerrelajación sucesiva (SOR), 244, 245
  iterativo de punto fijo, 238
  regresivo de Euler, 239
    incondicionalmente estable, 242
Método de Adams-Bashforth de
  cuatro pasos, 240
  dos pasos, 240
  tres pasos, 240
Método de Adams-Moulton de
  dos pasos, 240
  tres pasos, 240
Método de diferencias finitas para la ecuación de
  calor, 241
  onda, 242
  Poisson, 241
Método explícito de
  primer orden, 239
  segundo orden, 239
  cuarto orden, 240
Método implícito de
  primer orden, 239
  segundo orden, 239
Moda, 209
Modelo
  binomial del movimiento browniano, 254
  multiperiodo binomial de activos, 255
Módulo, 11
Movimiento browniano, 254
Multiplicación de
  números complejos, 10
  un vector por un escalar, 119

N
Nabla, 122
n factorial, 7
n-ésima derivada, 64
Notación para vectores, 119
Número(s), 250
  de Bernoulli, 71, 113, 134, 138, 142
  de Euler, 71, 138, 142
  directores, 34
Número(s) complejo(s)
  división de, 10
  multiplicación de, 10
  raíces de, 12
  resta de, 10
  suma de, 10
  valor absoluto de un, 11

O
Onda
  cuadrada, 191
  triangular, 191
Opción de compra estilo
  americano, 257
  europeo, 257
Opción de venta estilo europeo, 257
Operador
  Biarmónico, 123
  del, 122

Operador de la transformada
de Laplace, 180
inversa de Laplace, 180
Origen, 119
Ortogonalidad de los polinomios de Legendre, 165
Óvalos de Cassini, 32

P

Parábola(s), 25, 26
homofocales, 129
Paraboloide
elíptico, 40
hiperbólico, 40
Parámetros, 208
Pares de transformadas de Fourier, 194
Parte(s)
adyacentes de un triángulo esférico, 52
imaginaria de un número complejo, 10
media de un triángulo esférico, 52
opuestas de un triángulo esférico, 52
real de un número complejo, 10
Perímetro
de un polígono regular, 17
de una elipse, 18
del círculo, 17
del paralelogramo, 16
del rectángulo, 16
del trapezoide, 16
del triángulo, 16
Periodicidad de las funciones hiperbólicas, 61
Plano
complejo, 11
gaussiano, 11
Polinomio(s)
asociados de Laguerre, 173
de Hermite, 169
de Laguerre, 171
de Legendre, 164, 236
Polinomios especiales de
Chebyshev, 175
Legendre, 164
Potencia(s), 53
de funciones hiperbólicas, 58
de funciones trigonométricas, 48
Precio del ejercicio, 257
Primera identidad de Green, 127
Probabilidad
condicional, 219
de un evento, 218
neutral al riesgo, 258, 259
Problema de la duplicación del cubo, 33
Proceso estocástico, 219
Producto
cruz, 121
de funciones hiperbólicas, 58
de Wallis, 207
escalar, 120
punto, 120
vectorial, 121
Promedio, 208
Propiedades
de los coeficientes binomiales, 8
del triángulo de Pascal, 8
Punto
de continuidad, 144
de discontinuidad, 144, 193
terminal, 119

Q

Quíntupla, 248

R

Radián, 447
Raíces de números complejos, 12
Raíz media cuadrática (RMS), 211
Rama(s), 49
principal, 49
Rango
intercuartil, 211
medio, 210
semi-intercuartil, 211
Razón de convergencia, 238
Recta de
mejor ajuste, 214
mínimos cuadrados, 214
regresión de *y* sobre *x*, 214
Regla
de Bayes, 220
de L´Hôpital, 154
de la adición, 218
de la cadena, 62
de la diferencia, 218
de Leibniz, 65
de monotonía, 218
de Simpson, 235
compuesta, 235
del complemento, 218
del paralelogramo para la suma de vectores, 119
del punto medio, 235, 239
compuesta, 235
del trapecio, 235, 239
compuesta, 235
68-95-99.7, 227
Reglas
de Napier, 52
generales de diferenciación, 62
generales de integración, 67
para las diferenciales, 65
Regresión lineal, 214
Relación de
Legendre, 202
recurrencia, 149
Relaciones
de recurrencia de los polinomios de Legendre, 165
que satisface la función gamma, 150
Resta de
funciones hiperbólicas, 58
números complejos, 10
Reversión de series de potencias, 141
Rosa de
cuatro pétalos, 29
tres pétalos, 29
Rotacional, 123, 128

S

Segunda
- derivada, 64
- identidad de Green, 127

Serie(s)
- aritmética, 134
- aritmética-geométrica, 134
- asintótica de Stirling, 151
- de Maclaurin, 138
- de potencias, 138
- de Taylor, 138
  - para funciones de dos variables, 141
- geométrica, 134
- ortogonal de los polinomios de Legendre, 165
- ortogonales de funciones de Bessel, 161

Sistema
- coordenado curvilíneo, 127
- de mano derecha, 121
- ortogonal, 127

Sucesión monótona creciente de eventos, 218

Suma de
- funciones hiperbólicas, 58
- números complejos, 10
- vectores, 119

Superficie de área
- de un paralelepípedo rectangular, 19
- de una esfera, 19

T

Teorema
- de arbitraje, 258
- de Bayes, 220
- de De Moivre, 11
- de extensión, 219
- de Gauss, 126
- de Green, 126
- de la divergencia, 126
- de la integral de Fourier, 193
- de multiplicación, 219
- de Stokes, 126
- del límite central (TLC), 229
- del punto fijo, 238
- fundamental del cálculo integral, 108

Teorema del valor
- intermedio, 237
- medio, 109

Tercera derivada, 64

Tractriz, 31

Transformación de coordenadas, 24, 36-37

Transformaciones de integrales, 70

Transformada
- coseno de Fourier, 195
- de Fourier, 194
- de Landen, 199
- seno de Fourier, 194

Transformada inversa
- coseno de Fourier, 195
- de Fourier, 194
- de Laplace, 180
- seno de Fourier, 194

Triángulo
- de Pascal, 8
- esférico, 51

U

Unidad imaginaria, 10

V

Valor(es)
- absoluto de un número complejo, 11
- central, 208
- cuadrático medio, 211
- de π, 3
- notables de la función gamma, 150
- principales, 49

Variable aleatoria
- continua, 223
- discreta, 223
- estandarizada, 227
- log-normal Y, 254

Variable aleatoria normal, 226
- estándar Z, 254
- X, 254

Varianza, 224
- muestral, 208, 210
- poblacional, 208, 212

Vector
- cero, 119
- nulo, 119
- unitario, 120

Vectores, 119

Vender en corto, 257

Volumen
- de un cilindro circular recto, 19
- de un cono circular recto, 20
- de un elipsoide, 21
- de un paraboloide de revolución, 21
- de un paralelepípedo rectangular, 19
- de una esfera, 19

Notas

Notas

Notas

Notas

Notas